Über beschränkte Funktionen, deren Wertevorrat gewisse Lücken aufweist

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Ludwig-Maximilians-Universität zu München

Vorgelegt am 6. April 1937

von

Helmut Unkelbach

aus Neustadt a. d. Weinstraße

München 1938

Berichterstatter: Geh. Rat Professor Dr. O. Perron

Tag der mündlichen Prüfung: 3. Juni 1937

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Sonderabdruck aus „Mathematische Annalen", Band 115, Seite 205.

Verlag von Julius Springer in Berlin

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Seite

Allgemeines über Funktionen $w = f(z)$, die den Bedingungen des Schwarzschen Lemmas genügen 206

I. Abschnitt.

Über Familien von Funktionen $w = f(z)$, welche einen Wert w_* auslassen.

§ 1. Obere Schranke für $|f'(0)|$ 208
§ 2. Untere Schranke für die Winkelderivierte D in Abhängigkeit von $|w_*|$ und arc w_* 211
§ 3. Untere Schranke für D, die von $|w_*|$ unabhängig ist. 215
§ 4. Untere Schranke für D, die von arc w_* unabhängig ist 218
§ 5. Abbildungen auf schlichte Bogen des Kreises $|w| = 1$ 220

II. Abschnitt.

Über Familien von Funktionen $w = f(z)$, welche einen Wert w_* nur an Kreuzungspunkten annehmen.

§ 1. Obere Schranke für $|f'(0)|$ 222
§ 2. Untere Schranke für D in Abhängigkeit von $|w_*|$ und arc w_* . . 226
§ 3. Untere Schranke für D, die von $|w_*|$ unabhängig ist 230
§ 4. Untere Schranke für D, die von arc w_* unabhängig ist 232
§ 5. Abbildungen auf schlichte Bogen des Kreises $|w| = 1$ 235

Einleitung.

Allgemeines über Funktionen $w = f(z)$, die den Bedingungen des Schwarzschen Lemmas genügen.

Die folgenden Untersuchungen befassen sich mit der Familie $\mathfrak{F}$ derjenigen Funktionen $w = f(z)$, welche den Bedingungen des Schwarzschen Lemmas genügen. Wir setzen demgemäß voraus, daß $f(z)$ regulär und $|f(z)| < 1$ ist für $|z| < 1$ und daß $f(0) = 0$ ist. Die Frage, wie durch diese Voraussetzungen die übrigen Eigenschaften von $f(z)$ beeinflußt werden, ist schon sehr eingehend untersucht worden. Insbesondere lassen sich für das Vergrößerungsverhältnis der durch $w = f(z)$ vermittelten konformen Abbildung bestimmte Schranken angeben. Für die vorliegende Arbeit ist nur die folgende, ganz elementare Tatsache von Bedeutung (die nachher in den Sätzen A, B und C noch etwas genauer formuliert wird): Sieht man von den Drehungen $w = \varepsilon z$ des Einheitskreises ab, so ergibt sich bei einer durch $w = f(z)$ vermittelten Abbildung

a) für $z = f(z) = 0$ Verkleinerung,

b) für alle z mit $|z| = |f(z)| = 1$ Vergrößerung.

Wir wollen im folgenden die Frage in Angriff nehmen, wie sich diese allgemeinen Aussagen über das Vergrößerungsverhältnis verschärfen lassen, wenn man das Bildgebiet $\mathfrak{G}$ des Kreises $|z| < 1$ gewissen geometrischen Bedingungen unterwirft.

Das Vergrößerungsverhältnis für $z = 0$ ist durch $|f'(0)|$ definiert. Die Aussage a) kann daher in folgende Form gefaßt werden:

Satz A (Schwarz):

$$|f'(0)| \leqq 1.$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur für die Drehungen $w = \varepsilon z$ ($|\varepsilon| = 1$).

Bei der Definition des Vergrößerungsverhältnisses auf dem Rande können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß der zu untersuchende Punkt des Kreises $|z| = 1$ der Punkt $z = 1$ ist. Wir betrachten nun mit Carathéodory[1]) eine Punktfolge z_ν des Kreises $|z| < 1$, für welche $\lim_{\nu \to \infty} z_\nu = 1$ ist und außerdem folgendes gilt:

$$(1) \qquad -\frac{\pi}{2} + \eta < \arc(1 - z_\nu) < \frac{\pi}{2} - \eta;$$

dabei sei η eine beliebig kleine, von ν unabhängige positive Zahl. Durch (1) werden solche Folgen z_ν ausgeschlossen, welche auf einer Kurve liegen, die

[1]) C. Carathéodory, Über die Winkelderivierten von beschränkten analytischen Funktionen. Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss., Phys.-Math. Klasse (1929).

den Kreis $|z| = 1$ im Punkte $z = 1$ berührt. Wir definieren dann das Vergrößerungsverhältnis D im Punkte $z = 1$ durch

$$D = \lim_{\nu \to \infty} \frac{1 - f(z_\nu)}{1 - z_\nu}, \tag{2}$$

falls dieser Grenzwert existiert und endlich ist und von der speziellen Wahl der Folge z_ν nicht abhängt. Dies ist nach Carathéodory sicher dann der Fall, wenn der Betrag $\left|\frac{1 - f(z_\nu)}{1 - z_\nu}\right|$ wenigstens für *eine* Folge z_ν beschränkt bleibt[2]). Unter dieser Voraussetzung gilt auch

$$\lim_{\nu \to \infty} f'(z_\nu) = D. \tag{3}$$

D heißt die Winkelderivierte von $f(z)$ für $z = 1$. Sie kann natürlich gemäß (2) nur dann einen endlichen Wert annehmen, wenn $\lim_{\nu \to \infty} f(z_\nu) = 1$ ist. (Für $\lim_{\nu \to \infty} f(z_\nu)$ schreiben wir auch kurz $f(1)$.) Gilt dagegen $\lim_{\nu \to \infty} \frac{1 - f(z_\nu)}{1 - z_\nu} = \infty$ für *eine* Folge z_ν, so gilt nach Carathéodory dasselbe für *jede* Folge z_ν. Wir sagen dann $D = \infty$. Für D gilt nun ganz allgemein die folgende Ungleichung, welche die präzise Fassung der Aussage b) darstellt:

Satz B (Julia-Carathéodory):

$$D \geqq 1.$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur für $w = z$.

Satz B ist in den Sätzen 1. und 4. der oben zitierten Arbeit von Carathéodory enthalten; man braucht nur die Juliasche Relation von Satz 1 der Arbeit von Carathéodory

$$\frac{|1 - f(z)|^2}{1 - |f(z)|^2} \leqq D \cdot \frac{|1 - z|^2}{1 - |z|^2}$$

für $z = 0$ und $f(0) = 0$ hinzuschreiben. Aus der letzten Aussage des eben zitierten Satzes 1 folgt unmittelbar, daß für $D = 1$ notwendig $f(z) \equiv z$ ist.

Aus Satz B folgert man leicht den nachstehenden

Satz C (Löwner):

Besitzt die Funktion $w = f(z)$ auf einem Bogen der Länge α des Kreises $|z| = 1$ stetige Randwerte vom Betrag 1 und bildet die Funktion diesen Bogen auf einen solchen der Länge β ab, so ist

$$\alpha \leqq \beta.$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur für die Drehungen $w = \varepsilon z$ ($|\varepsilon| = 1$)[3]).

[2]) Man beachte, daß in (2) keine Absolutstriche nötig sind; der Limes existiert auch so und ist positiv.

[3]) Siehe K. Löwner, Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I. Math. Annalen **89** (1923), S. 103.

Wenn man jetzt Funktionen der Familie $\mathfrak{F}$ betrachtet, die außerdem noch gewissen Nebenbedingungen genügen, also eine engere Klasse auswählt, so ist zu vermuten, daß sich die unteren Schranken heraufsetzen, die oberen herabdrücken lassen. In dieser Richtung liegt u. a. eine Arbeit von Carathéodory[4]) vor, der von seinen Funktionen verlangt, daß sie in einem Paar von vorgeschriebenen Punkten des Kreises $|z| < 1$ gleiche Werte annehmen. Zweck der vorliegenden Arbeit ist ebenfalls die Verbesserung der Schranken durch Verengerung der Funktionenklasse, und zwar wollen wir im I. Abschnitt diejenigen Funktionen der Familie $\mathfrak{F}$ betrachten, welche für $|z| < 1$ einen Wert w_* mit $0 < |w_*| < 1$ nicht annehmen. Geometrisch besagt dies, daß das Bildgebiet $\mathfrak{G}$ des Kreises $|z| < 1$ die Stelle w_* nicht überdeckt. Dabei ist auch der Fall mit eingeschlossen, daß w_* ein logarithmischer Verzweigungspunkt von $\mathfrak{G}$ ist. Denn logarithmische Verzweigungspunkte sind topologisch immer als Randpunkte aufzufassen. Im II. Abschnitt werden wir unsere Betrachtungen auf allgemeinere Teilfamilien von $\mathfrak{F}$ ausdehnen, indem wir voraussetzen, daß $w = f(z)$ für $|z| < 1$ einen Wert w_* mit $|w_*| < 1$ nur an Kreuzungspunkten annimmt. Geometrisch besagt dies, daß das Bildgebiet $\mathfrak{G}$ die Stelle w_* höchstens mit algebraischen Verzweigungspunkten überdeckt[5]).

In späteren Arbeiten wird gezeigt werden, wie sich die Schranken des I. Abschnitts weiter verbessern lassen, wenn man sich auf solche Funktionen beschränkt, die den Einheitskreis auf ein schlichtes bzw. konvexes Gebiet abbilden.

I. Abschnitt.

Über Familien von Funktionen $w = f(z)$, welche einen Wert w_* auslassen.

§ 1.

Obere Schranke für $|f'(0)|$.

Wir setzen in diesem Abschnitt voraus, daß die Funktion $w = f(z)$ für $|z| < 1$ einen Wert w_* mit $0 < |w_*| < 1$ nicht annimmt. Für die Abschätzung von $|f'(0)|$ ist dabei der Wert von arc w_* belanglos. Wir verlangen lediglich, daß $|w_*| \leqq r < 1$ ist, und erhalten dann die folgende Verschärfung von Satz A:

[4]) C. Carathéodory, Über beschränkte Funktionen, die in einem Paar von vorgeschriebenen Punkten gleiche Werte annehmen. Monatshefte f. Math. u. Phys. **43** (1936), S. 225.

[5]) In beiden Abschnitten ist die Abschätzung der Winkelderivierten im Falle $w_* > 0$ von besonderem Interesse. Ich verweise vor allem auf die Konstanten der Sätze III und IX sowie auf den Inhalt von Satz X.

Satz I. *Ist* $\mathfrak{F}_r$ *die Familie der Funktionen, die den Bedingungen des Schwarzschen Lemmas genügen und für* $|z| < 1$ *den Wert* w_* *mit* $0 < |w_*| \leqq r < 1$ *nicht annehmen, so gilt für eine beliebige Funktion* $w = f_r(z)$ *aus* $\mathfrak{F}_r$

$$|f_r'(0)| \leqq \frac{2r \log \frac{1}{r}}{1 - r^2} = \mathfrak{M}(r) < 1.$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur für

$${}^0f_r(z) \equiv \frac{\frac{1-z}{r^{\frac{1+z}{2}} - r}}{1 - r^{\frac{1+z}{2}}}\ {}^6)$$

und für diejenigen Funktionen, welche durch Drehungen der w- und z-Ebene aus $w = {}^0f_r(z)$ *hervorgehen. Die Funktion* ${}^0f_r(z)$ *ist dadurch ausgezeichnet, daß sie für alle positiven Werte von z positiv wird; der Wert* w_**, den sie nicht annimmt, ist* $-r$ [6a]).

Beweis. Wir beweisen zunächst, daß die Funktion ${}^0f_r(z)$ den Kreis $|z| < 1$ konform auf denjenigen Teil der Riemannschen Fläche von $\log(w + r)$ abbildet, welcher den Kreis $|w| < 1$ überdeckt, wobei ${}^0f_r(z)$ für positive Werte von z positiv und ${}^0f_r(0) = 0$ ist. Zu diesem Zweck führen wir die eben charakterisierte Abbildung in drei Schritten durch. Zunächst bilden wir durch die lineare Transformation

$$u(z) = \log r \cdot \frac{1-z}{1+z} \tag{4}$$

den Einheitskreis $|z| < 1$ auf die Halbebene $\Re(u) < 0$ ab. Dabei ist $u_0 = u(0) = \log r$. Hierauf bilden wir die Halbebene durch

$$v(u) = e^u \tag{5}$$

auf denjenigen Teil der Riemannschen Fläche von $\log v$ ab, welcher den Kreis $|v| < 1$ überdeckt, wobei $v_0 = e^{u_0} = r$ ist. Schließlich führen wir durch die Transformation

$$w(v) = \frac{v - r}{1 - rv} \tag{6}$$

den logarithmischen Verzweigungspunkt $v = 0$ in $w = -r$ über. Dabei ist $w(v_0) = 0$. Durch Zusammensetzung der Abbildungen (4), (5) und (6) erhalten wir die Funktion $w = {}^0f_r(z)$ und man sieht leicht, daß die Strecke $0 \leqq z \leqq 1$ in die Strecke $0 \leqq w \leqq 1$ übergeht. Da $v = e^u$ nirgends 0

---

[6]) Die Potenzen von r definieren wir immer so, daß sie für reelle Werte der Exponenten positiv werden.

[6a]) Die Sätze I und VII bieten nichts Neues. Sie werden lediglich wegen der Analogie zu den Sätzen über die Winkelderivierte vollständig bewiesen.

wird, kann w nach (6) nirgends gleich $-r$ werden. Die Funktion ${}^0f_r(z)$ gehört daher zur Familie $\mathfrak{F}_r$. ${}^0f_r'(0)$ ergibt sich aus

$$\left(\frac{dw}{dv}\right)_{v=v_0} = \frac{1}{1-r^2},$$

$$\left(\frac{dv}{du}\right)_{u=u_0} = r,$$

$$\left(\frac{du}{dz}\right)_{z=0} = -2\log r,$$

d. h.

$${}^0f_r'(0) = \frac{2r\log\frac{1}{r}}{1-r^2} \equiv \mathfrak{M}(r),$$

wie in Satz I behauptet war.

Wir brauchen jetzt nur noch zu zeigen, daß für alle übrigen Funktionen $f_r(z)$ mit $-r \leqq w_* < 0$ und $f_r'(0) > 0$ die Ungleichung $f_r'(0) < \mathfrak{M}(r)$ erfüllt ist. Damit ist dann schon alles bewiesen. Denn jede Funktion $f_r(z)$ läßt sich durch Drehung der w-Ebene und anschließende Drehung der z-Ebene so transformieren, daß $w_* < 0$ und $f_r'(0) > 0$ wird. Durch Drehungen wird aber der Betrag $|f_r'(0)|$ nicht verändert.

Zunächst nehmen wir an, daß $w_* = -r$ und $f_r'(0) > 0$ ist, und wollen unter dieser Voraussetzung die Werte $f_r'(0)$ und ${}^0f_r'(0)$ zueinander in Beziehung setzen. Wir bemerken, daß die Funktion $w = {}^0f_r(z)$ eine gewisse Umgebung von $z = 0$ umkehrbar eindeutig auf die schlichte Kreisscheibe $|w| < r$ abbildet. Die Umkehrfunktion[7]) $z = {}^0\overline{f_r}(w)$ läßt sich daher im Kreis $|w| < r$ in eindeutiger Weise so definieren, daß ${}^0\overline{f_r}(0) = 0$ ist. Dieses eindeutige Funktionselement von $z = {}^0\overline{f_r}(w)$ bezeichnen wir mit $z = \mathfrak{P}_r(w)$, wobei $\mathfrak{P}_r(0) = 0$ ist. Die Funktion $z = \mathfrak{P}_r(w)$ läßt sich auch über den Kreis $|w| < r$ hinaus analytisch fortsetzen, und zwar längs jeder innerhalb $|w| < 1$ verlaufenden Kurve $\mathfrak{K}_w$, welche den Punkt $w = -r$ nicht trifft; dabei ist stets $|\mathfrak{P}_r(w)| < 1$.

Wir betrachten jetzt die in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes definierte Funktion $\zeta = h_r(z) = \mathfrak{P}_r(f_r(z))$, wobei $h_r(0) = 0$ ist. Man sieht leicht, daß sich $h_r(z)$ im ganzen Kreis $|z| < 1$ eindeutig fortsetzen läßt und absolut < 1 bleibt. Denn wenn z vom Nullpunkt ausgehend innerhalb des Einheitskreises $|z| < 1$ eine Kurve $\mathfrak{K}_z$ beschreibt, so beschreibt $w = f_r(z)$ innerhalb des Einheitskreises $|w| < 1$ eine Kurve $\mathfrak{K}_w$, welche den Punkt $w = -r$ nicht trifft; längs einer solchen ist aber $\mathfrak{P}_r(w)$ fortsetzbar und absolut < 1. Also ist $h_r(z)$ längs *jeder* vom Nullpunkt ausgehenden Kurve im Kreis $|z| < 1$ fortsetzbar, so daß aus dem Monodromiesatz die Eindeutig-

[7]) Wir bezeichnen im folgenden stets mit $z = \overline{f}(w)$ die Umkehrfunktion von $w = f(z)$.

keit folgt. $h_r(z)$ erfüllt daher die Bedingungen des Schwarzschen Lemmas. Also ist $h_r'(0) \leqq 1$, d. h.

$$f_r'(0) = h_r'(0) \cdot {}^0f_r'(0) \leqq {}^0f_r'(0).$$

Das Gleichheitszeichen kann wegen $h_r'(0) > 0$ nach Satz A nur dann gelten, wenn $h_r(z) \equiv z$, d. h. ${}^0f_r(z) \equiv f_r(z)$.

Wir müssen jetzt nur noch zeigen, daß auch für $|w_*| < r$ die Ungleichung $|f_r'(0)| < \mathfrak{M}(r)$ gilt; dazu wird es genügen, daß $\mathfrak{M}(r)$ für $0 < r < 1$ eine monoton zunehmende Funktion ist. Es ist also zu beweisen, daß

$$\mathfrak{M}'(r) = 2 \cdot \frac{(\log r + 1)(r^2 - 1) - 2r^2 \log r}{(1 - r^2)^2} > 0 \text{ für } 0 < r < 1$$

oder

$$P_1(r) = \log r + \frac{1 - r^2}{1 + r^2} < 0.$$

Nun ist

$$P_1'(r) = \frac{1}{r} - \frac{4r}{(1 + r^2)^2} = \frac{(1 - r^2)^2}{r(1 + r^2)^2} > 0.$$

Da $P_1(1) = 0$ ist, so ist $P_1(r) < 0$ für $r < 1$. Damit ist Satz I bewiesen.

§ 2.

Untere Schranke für die Winkelderivierte D in Abhängigkeit von $|w_*|$ und arc w_*.

In ähnlicher Weise wie $|f'(0)|$ läßt sich auch die Winkelderivierte D abschätzen. Dabei werden wir zunächst eine untere Schranke für D erhalten, die von $|w_*|$ *und* arc w_* abhängt, gemäß dem folgenden

Satz II. *Ist $\mathfrak{F}_{r\varphi}$ die Familie aller Funktionen, die den Bedingungen des Schwarzschen Lemmas genügen und die für $|z| < 1$ den Wert $w_* = re^{\varphi i}$ mit $0 < r < 1$, $0 \leqq \varphi < 2\pi$ nicht annehmen, so gilt für die Winkelderivierte $D_{r\varphi}$ einer beliebigen Funktion $f_{r\varphi}(z)$ aus $\mathfrak{F}_{r\varphi}$*

$$D_{r\varphi} \geqq \frac{1 - 2r\cos\varphi + r^2}{2(1 - r^2)\log\frac{1}{r}} \cdot \left\{(\log r)^2 + \left(2\operatorname{arctg}\frac{r\sin\varphi}{1 - r\cos\varphi} + \varphi - \pi\right)^2\right\} \equiv M(r, \varphi) > 1$$

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}\frac{r\sin\varphi}{1 - r\cos\varphi} < \frac{\pi}{2}.$$

Es gibt für $\varphi > 0$ zu jedem Wert w_* genau eine Funktion ${}^1f_{r\varphi}(z)$ der Familie $\mathfrak{F}_{r\varphi}$, für welche das Gleichheitszeichen gilt. Dagegen gilt für $\varphi = 0$ das Gleichheitszeichen bei zwei Funktionen ${}^1f_{r0}(z)$ und ${}^2f_{r0}(z)$ der Familie $\mathfrak{F}_{r0}$. Die Funktionen ${}^1f_{r\varphi}(z)$ und ${}^2f_{r0}(z)$ gehen aus ${}^0f_r(z)$ durch geeignete Drehungen der w- und z-Ebene hervor.

Beweis. Wir können uns beim Beweis auf solche Funktionen $f_{r\varphi}(z)$ beschränken, für welche $f_{r\varphi}(1) = 1$ ist, da sonst stets $D_{r\varphi} = \infty$ wird. Zunächst betrachten wir eine spezielle Funktion $g_{r\varphi}(z)$ der Familie $\mathfrak{F}_{r\varphi}$, die

Für $\varphi > 0$ läßt sich also die Schranke von Satz B nicht unabhängig von r verbessern. Dagegen gilt für $\varphi = 0$, d. h. $w_* > 0$, der nachstehende

Satz III. *Ist $\mathfrak{F}_{r0}$ die Familie aller Funktionen, die den Bedingungen des Schwarzschen Lemmas genügen und die für $|z| < 1$ einen Wert $w_* = r$ mit $0 < r < 1$ nicht annehmen, so gilt für die Winkelderivierte D_{r0} einer beliebigen Funktion $f_{r0}(z)$ aus $\mathfrak{F}_{r0}$*

$$D_{r0} > \frac{\pi^2}{4} = 2{,}4674\ldots.$$

Es gibt, wenn η eine beliebig kleine positive Zahl ist, gewisse r und Funktionen der Familie $\mathfrak{F}_{r0}$, für welche $D_{r0} < \frac{\pi^2}{4} + \eta$.

Beweis. Nach Satz II ist

$$D_{r0} \geqq M(r, 0) = \frac{(1-r)\,\{(\log r)^2 + \pi^2\}}{2\,(1+r)\log\frac{1}{r}},$$

wo für gewisse Funktionen das Gleichheitszeichen gilt; für $r \to 1$ ergibt sich

$$\lim_{r \to 1} M(r, 0) = \frac{\pi^2}{4}.$$

Damit ist die zweite Aussage von Satz III schon bewiesen, und zwar ist ${}^1f'_{r0}(1) = {}^2f'_{r0}(1) < \frac{\pi^2}{4} + \eta$, wenn $w_* = r$ hinreichend nahe bei 1 liegt.

Es ist jetzt noch zu zeigen, daß

$$\frac{(1-r)\,\{(\log r)^2 + \pi^2\}}{2\,(1+r)\log\frac{1}{r}} > \frac{\pi^2}{4} \quad \text{für} \quad 0 < r < 1$$

oder

$$[2\,(1-r) + (1+r)\log r]\,\pi^2 + 2\,(1-r)\,(\log r)^2 > 0.$$

Nun ist $2\,(1-r) + (1+r)\log r < 0$ und $\pi^2 < 10$. Wir brauchen also nur zu beweisen, daß

$$P_2(r) \equiv 10 + 5\,\frac{1+r}{1-r}\log r + (\log r)^2 > 0.$$

Nun ist $\lim_{r \to 1} P_2(r) = 0$. Es ist also zu zeigen, daß

$$P_2'(r) < 0, \quad \text{d. h.} \quad 5\,(1-r^2) + 10\,r\log r + 2\,(1-r)^2\log r < 0$$

oder

$$P_3(r) \equiv \log r + \frac{5}{2}\cdot\frac{1-r^2}{1+3\,r+r^2} < 0.$$

Wegen $P_3(1) = 0$ ist zu zeigen, daß

$$P_3'(r) > 0, \quad \text{d. h.} \quad 2\,r^4 - 3\,r^3 + 2\,r^2 - 3\,r + 2 \equiv (r-1)^2\,(2\,r^2 + r + 2) > 0.$$

Die letztere Ungleichung aber ist trivial. Damit ist Satz III bewiesen.

Wir wollen nun noch gewisse Teilfamilien ${}^{l}\mathfrak{F}_{r_0}$ von $\mathfrak{F}_{r_0}$ etwas näher betrachten; dabei möge jede Funktion $w = {}^{l}f_{r_0}(z)$ der Familie ${}^{l}\mathfrak{F}_{r_0}$ die gerade Strecke $0 \leqq z \leqq 1$ auf eine Kurve ${}^{l}\mathfrak{C}_{r_0}$ abbilden, welche sich l-mal um den Punkt w_* herumschlingt. Führen wir in der Familie ${}^{l}\mathfrak{F}_{r_0}$, wie beim Beweis von Satz II, statt des Parameters φ den Parameter φ_z ein, so ist $\varphi_z = \pi + (2l+1)\pi$. Dann gilt also für die Winkelderivierte ${}^{l}D_{r_0}$ von ${}^{l}f_{r_0}(z)$

$$ {}^{l}D_{r_0} \geqq M(r, 2(l+1)\pi) = \frac{(1-r)\{(\log r)^2 + (2l+1)^2\pi^2\}}{2(1+r)\log\frac{1}{r}}, $$

also

$$ \lim_{r \to 1} M(r, 2(l+1)\pi) = \frac{1}{4}(2l+1)^2\pi^2. $$

Dagegen gilt nicht für alle Werte von l und r

$$ {}^{l}D_{r_0} \geqq \frac{1}{4}(2l+1)^2\pi^2. $$

Das wäre nämlich gleichbedeutend mit

$$ P_4(r, l) = [2(1-r) + (1+r)\log r](2l+1)^2\pi^2 + 2(1-r)(\log r)^2 \geqq 0. $$

Diese Ungleichung ist aber sicher nicht für alle Werte von l richtig. Denn wegen $2(1-r) + (1+r)\log r < 0$ kann man für festes r den Betrag von l immer so groß wählen, daß $P_4(r, l) < 0$ wird. Die Funktion $M(r, \varphi_z)$ ist also nicht für jeden festen Wert von φ_z in r monoton. Dagegen sieht man leicht, daß ${}^{l}D_{r_0}$ für $l \to \infty$ mindestens von gleicher Ordnung wie l unendlich wird, und zwar gleichmäßig für alle r. Es gilt nämlich

Satz IV. *${}^{l}\mathfrak{F}_{r_0}$ sei die Familie aller Funktionen, welche der Familie $\mathfrak{F}_{r_0}$ angehören und die gerade Strecke $0 \leqq z \leqq 1$ auf eine Kurve ${}^{l}\mathfrak{C}_{r_0}$ abbilden, welche sich l-mal um den Punkt w_* herumschlingt; dann gilt für die Winkelderivierte ${}^{l}D_{r_0}$ einer beliebigen Funktion ${}^{l}f_{r_0}(z)$ aus ${}^{l}\mathfrak{F}_{r_0}$*

$$ {}^{l}D_{r_0} > 2\pi l + \pi - 2. $$

Es gibt für jedes l solche r und Funktionen aus ${}^{l}\mathfrak{F}_{r_0}$, für welche ${}^{l}D_{r_0} < 2\pi l + \pi$ ist.

Beweis. Aus dem Beweis von Satz II ergibt sich, daß

$$ {}^{l}D_{r_0} \geqq M(r, 2(l+1)\pi) = \frac{(1-r)\{(\log r)^2 + (2l+1)^2\pi^2\}}{2(1+r)\log\frac{1}{r}}, $$

wo für gewisse Funktionen das Gleichheitszeichen gilt; setzt man speziell $r = e^{-2\pi l - \pi}$, so ergibt sich

$$ M(e^{-2\pi l-\pi}, 2(l+1)\pi) = \frac{e^{2\pi l+\pi} - 1}{e^{2\pi l+\pi} + 1}(2\pi l + \pi) < 2\pi l + \pi. $$

Damit ist die zweite Aussage von Satz IV schon bewiesen.

bedingungen $g_{r\varphi_\varkappa}(0) = 0$ und $g_{r\varphi_\varkappa}(1) = 1$; die Umläufe von $\mathfrak{C}_{r\varphi_\varkappa}$ sind, wie aus (16) und (17) folgt, durch $\varkappa$ in der richtigen Weise bestimmt. Die Winkelderivierte $g'_{r\varphi_\varkappa}(1)$, die nach Satz B notwendig positiv ist, ergibt sich nun aus

$$g'_{r\varphi_\varkappa}(1) = \left|\frac{dw}{dv}\right|_{v=v_1} \cdot \left|\frac{dv}{du}\right|_{u=u_1} \cdot \left|\frac{du}{dz}\right|_{z=1}$$

$$\left(\frac{dw}{dv}\right)_{v=v_1} = \frac{(1-re^{-\varphi i})^2}{1-r^2};$$

$$\left(\frac{dv}{du}\right)_{u=u_1} = \frac{1-re^{\varphi i}}{1-re^{-\varphi i}}$$

$$\left(\frac{du}{dz}\right)_{z=1} = e^{\varkappa i} \cdot \frac{(u_1+\bar{u}_0)^2}{u_0+\bar{u}_0},$$

$$(20)\quad g'_{r\varphi_\varkappa}(1) = \frac{(1-re^{\varphi i})(1-re^{-\varphi i})}{2(1-r^2)\log\frac{1}{r}} \cdot \left|\log\frac{1-re^{\varphi i}}{1-re^{-\varphi i}} + \log r + (\pi-\varphi_\varkappa)i\right|^2.$$

Nun ist

$$\log\frac{1-re^{\varphi i}}{1-re^{-\varphi i}} = -2i\,\mathrm{arctg}\frac{r\sin\varphi}{1-r\cos\varphi}, \quad -\frac{\pi}{2} < \mathrm{arctg} < \frac{\pi}{2},$$

und

$$(1-re^{\varphi i})(1-re^{-\varphi i}) = 1-2r\cos\varphi+r^2.$$

Durch Einsetzen in (20) erhalten wir

$$g'_{r\varphi_\varkappa}(1) = \frac{1-2r\cos\varphi+r^2}{2(1-r^2)\log\frac{1}{r}} \cdot \left\{(\log r)^2 + \left(2\,\mathrm{arctg}\frac{r\sin\varphi}{1-r\cos\varphi} + \varphi_\varkappa - \pi\right)^2\right\} \equiv M(r,\varphi_\varkappa).$$

Für die Funktionen $g_{r\varphi_\varkappa}(z)$ gilt also im Falle $\varkappa = 0$, d. h. $0 \leqq \varphi_\varkappa < 2\pi$, in Satz II das Gleichheitszeichen. Wir können daher $g_{r\varphi_\varkappa}(z) = {}^1f_{r\varphi}(z)$ setzen für $0 \leqq \varphi_\varkappa < 2\pi$. Wegen $M(r, 2\pi) = M(r, 0)$ gilt das Gleichheitszeichen in Satz II auch für $g_{r,2\pi}(z)$ und wir können $g_{r,2\pi}(z) = {}^2f_{r0}(z)$ setzen. Aus (14) folgt dann unmittelbar die letzte Behauptung von Satz II. Liegt $\varphi_\varkappa$ außerhalb des Intervalles $0 \leqq \varphi_\varkappa \leqq 2\pi$, so ist $g'_{r\varphi_\varkappa}(1) > M(r, \varphi)$. Denn setzen wir

$$2\,\mathrm{arctg}\frac{r\sin\varphi}{1-r\cos\varphi} + \varphi_\varkappa - \pi = \Omega(r, \varphi_\varkappa),$$

so gilt für $2\nu\pi < \varphi_\varkappa < 2(\nu+1)\pi$ die Ungleichung

$$(2\nu-1)\pi < \Omega < (2\nu+1)\pi.\ ^{10})$$

[10]) Für $\nu = 0$ folgt die Ungleichung aus der Tatsache, daß die Größen $\varphi_\varkappa - \pi$ und $2\,\mathrm{arctg}\frac{r\sin\varphi}{1-r\cos\varphi}$ entgegengesetztes Vorzeichen haben; daher ist $|\Omega| < \pi$ wegen $|\varphi_\varkappa - \pi| < \pi$ und $\left|2\,\mathrm{arctg}\frac{r\sin\varphi}{1-r\cos\varphi}\right| < \pi$. Die Ungleichung für $\nu \neq 0$ folgt daraus durch Addition ganzzahliger Vielfachen von 2π.

Daher wird der Wert von $\Omega(r, \varphi)^2$ vergrößert, wenn ein ganzzahliges Vielfaches von 2π zu φ hinzugezählt wird (abgesehen von dem Fall $M(r, 0) = M(r, 2\pi)$). Also ist allgemein

$$g'_{r\varphi_\varkappa}(1) \geqq M(r, \varphi) \tag{21}$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur für die Funktionen ${}^1f_{r\varphi}(z)$ und ${}^2f_{r0}(z)$.

Die allgemeine Aussage von Satz II ergibt sich nun durch Vergleich einer beliebigen Funktion $f_{r\varphi}(z)$ mit einer Funktion $g_{r\varphi_\varkappa}(z)$. Wie beim Beweis von Satz I sieht man, daß die Funktion $\zeta = \overline{g_{r\varphi_\varkappa}}(f_{r\varphi}(z)) - h_{r\varphi_\varkappa}(z)$ bei geeigneter Wahl des Zweiges $\overline{g_{r\varphi_\varkappa}}(w)$ im Kreis $|z| < 1$ eindeutig ist und die Bedingungen des Schwarzschen Lemmas erfüllt. Denkt man sich die Zahl $\varkappa$ so bestimmt, daß die Bilder, welche die Funktionen $f_{r\varphi}(z)$ und $g_{r\varphi_\varkappa}(z)$ von der Strecke $0 \leqq z \leqq 1$ entwerfen, sich in gleicher Weise um w_* herumschlingen, so ist $h_{r\varphi_\varkappa}(1) = 1$. Wir bezeichnen nun die Winkelderivierte von $\zeta = h_{r\varphi_\varkappa}(z)$ mit D_h; dann gilt für jede Folge z_ν, welche die Voraussetzung (1) (S. 206) erfüllt:

$$D_h = \lim_{\nu \to \infty} \frac{1 - h_{r\varphi_\varkappa}(z_\nu)}{1 - z_\nu} = \lim_{\nu \to \infty} \frac{\dfrac{1 - f_{r\varphi}(z_\nu)}{1 - z_\nu}}{\dfrac{1 - w_\nu}{1 - \zeta_\nu}} = \frac{D_{r\varphi}}{g'_{r\varphi_\varkappa}(1)}. \tag{22}$$

Dabei ist $h_{r\varphi_\varkappa}(z_\nu) = \zeta_\nu$ und $g_{r\varphi_\varkappa}(\zeta_\nu) = w_\nu$ gesetzt. Da $h_{r\varphi_\varkappa}(z)$ die Bedingungen des Schwarzschen Lemmas erfüllt, ist

$$D_h \geqq 1, \tag{23}$$

wo das Gleichheitszeichen nur dann gilt, wenn $h_{r\varphi_\varkappa}(z) \equiv z$, d. h. $f_{r\varphi}(z) \equiv g_{r\varphi_\varkappa}(z)$. Aus (21), (22) und (23) folgt nun

$$D_{r\varphi} \geqq g'_{r\varphi_\varkappa}(1) \geqq M(r, \varphi).$$

Beide Gleichheitszeichen gelten nur, wenn $f_{r\varphi}(z) = {}^1f_{r\varphi}(z)$ oder $f_{r\varphi}(z) \equiv {}^2f_{r0}(z)$, w. z. b. w.

§ 3.

Untere Schranke für D, die von $|w_*|$ unabhängig ist.

Der Fall $\varphi = 0$ ist in Satz II dadurch ausgezeichnet, daß das Gleichheitszeichen für zwei verschiedene Funktionen gilt. Auch in anderer Hinsicht ist dieser Fall von besonderem Interesse und unterscheidet sich wesentlich vom Fall $\varphi > 0$. Führen wir nämlich für feste Werte von φ den Grenzprozeß $\lim_{r \to 1} M(r, \varphi)$ durch, so errechnet man

$$\lim_{r \to 1} M(r, \varphi) = 1 \quad \text{für} \quad \varphi > 0. \tag{24}$$

Für $\varphi > 0$ läßt sich also die Schranke von Satz B nicht unabhängig von r verbessern. Dagegen gilt für $\varphi = 0$, d. h. $w_* > 0$, der nachstehende

Satz III. *Ist $\mathfrak{F}_{r0}$ die Familie aller Funktionen, die den Bedingungen des Schwarzschen Lemmas genügen und die für $|z| < 1$ einen Wert $w_* = r$ mit $0 < r < 1$ nicht annehmen, so gilt für die Winkelderivierte D_{r0} einer beliebigen Funktion $f_{r0}(z)$ aus $\mathfrak{F}_{r0}$*

$$D_{r0} > \frac{\pi^2}{4} = 2{,}4674\ldots.$$

Es gibt, wenn η eine beliebig kleine positive Zahl ist, gewisse r und Funktionen der Familie $\mathfrak{F}_{r0}$, für welche $D_{r0} < \frac{\pi^2}{4} + \eta$.

Beweis. Nach Satz II ist

$$D_{r0} \geqq M(r, 0) = \frac{(1-r)\{(\log r)^2 + \pi^2\}}{2(1+r)\log\frac{1}{r}},$$

wo für gewisse Funktionen das Gleichheitszeichen gilt; für $r \to 1$ ergibt sich

$$\lim_{r \to 1} M(r, 0) = \frac{\pi^2}{4}.$$

Damit ist die zweite Aussage von Satz III schon bewiesen, und zwar ist ${}^1f'_{r0}(1) = {}^2f'_{r0}(1) < \frac{\pi^2}{4} + \eta$, wenn $w_* = r$ hinreichend nahe bei 1 liegt.

Es ist jetzt noch zu zeigen, daß

$$\frac{(1-r)\{(\log r)^2 + \pi^2\}}{2(1+r)\log\frac{1}{r}} > \frac{\pi^2}{4} \quad \text{für} \quad 0 < r < 1$$

oder

$$[2(1-r) + (1+r)\log r]\pi^2 + 2(1-r)(\log r)^2 > 0.$$

Nun ist $2(1-r) + (1+r)\log r < 0$ und $\pi^2 < 10$. Wir brauchen also nur zu beweisen, daß

$$P_2(r) \equiv 10 + 5\frac{1+r}{1-r}\log r + (\log r)^2 > 0.$$

Nun ist $\lim_{r \to 1} P_2(r) = 0$. Es ist also zu zeigen, daß

$$P_2'(r) < 0, \quad \text{d. h.} \quad 5(1-r^2) + 10\,r\log r + 2(1-r)^2\log r < 0$$

oder

$$P_3(r) \equiv \log r + \frac{5}{2}\cdot\frac{1-r^2}{1+3r+r^2} < 0.$$

Wegen $P_3(1) = 0$ ist zu zeigen, daß

$$P_3'(r) > 0, \quad \text{d. h.} \quad 2r^4 - 3r^3 + 2r^2 - 3r + 2 \equiv (r-1)^2(2r^2 + r + 2) > 0.$$

Die letztere Ungleichung aber ist trivial. Damit ist Satz III bewiesen.

Wir wollen nun noch gewisse Teilfamilien ${}^{l}\mathfrak{F}_{r_0}$ von $\mathfrak{F}_{r_0}$ etwas näher betrachten; dabei möge jede Funktion $w = {}^{l}f_{r_0}(z)$ der Familie ${}^{l}\mathfrak{F}_{r_0}$ die gerade Strecke $0 \leqq z \leqq 1$ auf eine Kurve ${}^{l}\mathfrak{C}_{r_0}$ abbilden, welche sich l-mal um den Punkt w_* herumschlingt. Führen wir in der Familie ${}^{l}\mathfrak{F}_{r_0}$, wie beim Beweis von Satz II, statt des Parameters φ den Parameter φ_z ein, so ist $\varphi_z = \pi \pm (2l+1)\pi$. Dann gilt also für die Winkelderivierte ${}^{l}D_{r_0}$ von ${}^{l}f_{r_0}(z)$

$$ {}^{l}D_{r_0} \geqq M(r, 2(l+1)\pi) = \frac{(1-r)\{(\log r)^2 + (2l+1)^2\pi^2\}}{2(1+r)\log\frac{1}{r}}, $$

also

$$ \lim_{r \to 1} M(r, 2(l+1)\pi) = \frac{1}{4}(2l+1)^2\pi^2. $$

Dagegen gilt nicht für alle Werte von l und r

$$ {}^{l}D_{r_0} \geqq \frac{1}{4}(2l+1)^2\pi^2. $$

Das wäre nämlich gleichbedeutend mit

$$ P_4(r, l) = [2(1-r) + (1+r)\log r](2l+1)^2\pi^2 + 2(1-r)(\log r)^2 \geqq 0. $$

Diese Ungleichung ist aber sicher nicht für alle Werte von l richtig. Denn wegen $2(1-r) + (1+r)\log r < 0$ kann man für festes r den Betrag von l immer so groß wählen, daß $P_4(r, l) < 0$ wird. Die Funktion $M(r, \varphi_z)$ ist also nicht für jeden festen Wert von φ_z in r monoton. Dagegen sieht man leicht, daß ${}^{l}D_{r_0}$ für $l \to \infty$ mindestens von gleicher Ordnung wie l unendlich wird, und zwar gleichmäßig für alle r. Es gilt nämlich

Satz IV. *${}^{l}\mathfrak{F}_{r_0}$ sei die Familie aller Funktionen, welche der Familie $\mathfrak{F}_{r_0}$ angehören und die gerade Strecke $0 \leqq z \leqq 1$ auf eine Kurve ${}^{l}\mathfrak{C}_{r_0}$ abbilden, welche sich l-mal um den Punkt w_* herumschlingt; dann gilt für die Winkelderivierte ${}^{l}D_{r_0}$ einer beliebigen Funktion ${}^{l}f_{r_0}(z)$ aus ${}^{l}\mathfrak{F}_{r_0}$*

$$ {}^{l}D_{r_0} > 2\pi l + \pi - 2. $$

Es gibt für jedes l solche r und Funktionen aus ${}^{l}\mathfrak{F}_{r_0}$, für welche ${}^{l}D_{r_0} < 2\pi l + \pi$ ist.

Beweis. Aus dem Beweis von Satz II ergibt sich, daß

$$ {}^{l}D_{r_0} \geqq M(r, 2(l+1)\pi) = \frac{(1-r)\{(\log r)^2 + (2l+1)^2\pi^2\}}{2(1+r)\log\frac{1}{r}}, $$

wo für gewisse Funktionen das Gleichheitszeichen gilt; setzt man speziell $r = e^{-2\pi l - \pi}$, so ergibt sich

$$ M(e^{-2\pi l-\pi}, 2(l+1)\pi) = \frac{e^{2\pi l+\pi} - 1}{e^{2\pi l+\pi} + 1}(2\pi l + \pi) < 2\pi l + \pi. $$

Damit ist die zweite Aussage von Satz IV schon bewiesen.

Es ist noch zu zeigen, daß

$$\frac{(1-r)\,\{(\log r)^2+(2\,l+1)^2\,\pi^2\}}{2\,(1+r)\log\frac{1}{r}} > 2\,\pi\,l+\pi-2 \quad \text{für} \quad 0<r<1,\ l=1,2,\ldots$$

oder, wenn $\log\frac{1}{r}=x$ und $2\,\pi\,l+\pi=a$ gesetzt wird:

$$\frac{e^x-1}{2\,(e^x+1)}\cdot\frac{x^2+a^2}{x}>a-2.$$

Zum Beweis dieser Ungleichung bemerken wir, daß

$$\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{e^x-1}{(e^x-1)+2}>\frac{x}{x+2}$$

wegen $e^x-1>x$ und weil $\frac{x}{x+2}=1-\frac{2}{x+2}$ mit x wächst. Also ist

$$\frac{e^x-1}{2\,(e^x+1)}\cdot\frac{x^2+a^2}{x}>\frac{x^2+a^2}{2\,(x+2)}=\frac{(x+2)^2-4\,(x+2)+4+a^2}{2\,(x+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(x+2+\frac{4+a^2}{x+2}\right)-2\geqq\sqrt{4+a^2}-2>a-2,$$

w. z. b. w.

§ 4.

Untere Schranke für D, die von arc w_* unabhängig ist.

Wir wollen nun auch bei der Abschätzung der Winkelderivierten statt der Funktionenfamilie $\mathfrak{F}_{r\varphi}$ die allgemeinere Familie $\mathfrak{F}_r$ betrachten, die schon in Satz I eine Rolle spielte. Für sie gilt der folgende

Satz V. *Bezeichnet man die Winkelderivierte einer beliebigen Funktion $w=f_r(z)$ der Familie $\mathfrak{F}_r$ mit D_r, so ist*

$$D_r\geqq\frac{(1+r)\log\frac{1}{r}}{2\,(1-r)}\equiv m(r)>1.$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur für die Funktion ${}^0f_r(z)$.

Beweis. Daß für die Funktion ${}^0f_r(z)={}^1f_{r\,\pi}(z)$ das Gleichheitszeichen gilt, folgt unmittelbar aus $m(r)\equiv M(r,\pi)$. Es ist jetzt zu zeigen, daß für $\varphi\neq\pi$ die Ungleichung $M(r,\varphi)>M(r,\pi)$ gilt. Wir setzen

$$\varphi-\pi=\omega,\quad \omega-2\operatorname{arctg}\frac{r\sin\omega}{1+r\cos\omega}=\Omega,$$

Dann ist $-\pi\leqq\omega<\pi$. Es ist zu zeigen, daß das Minimum von

$$(1+2\,r\cos\omega+r^2)\,\{(\log r)^2+\Omega^2\}$$

nur bei $\omega = 0$ erreicht wird. Da es sich um eine gerade Funktion von ω handelt, können wir uns beim Beweis auf das Intervall $0 \leqq \omega \leqq \pi$ beschränken. Die Behauptung lautet dann:

$$(1 + 2r\cos\omega + r^2)\{(\log r)^2 + \Omega^2\} > (1 + r)^2 (\log r)^2$$
$$\text{für } 0 < \omega \leqq \pi$$

oder

$$(1 + 2r\cos\omega + r^2)\,\Omega^2 > 2r(1 - \cos\omega)(\log r)^2$$

oder

$$\Omega > \frac{2\sqrt{r}\log\frac{1}{r}\sin\frac{\omega}{2}}{\sqrt{1 + 2r\cos\omega + r^2}}.$$

Setzen wir

$$P_5(\omega) = \Omega - \frac{2\sqrt{r}\log\frac{1}{r}\sin\frac{\omega}{2}}{\sqrt{1 + 2r\cos\omega + r^2}},$$

so ist $P_5(0) = 0$ und unsere Behauptung lautet: $P_5(\omega) > 0$ für $\omega > 0$. Wir werden zeigen, daß $P_5'(\omega) > 0$ für $\omega > 0$, womit unsere Behauptung bewiesen wird. Nun ist

$$P_5'(\omega) = \frac{1 - r^2}{1 + 2r\cos\omega + r^2} - \frac{\sqrt{r}\log\frac{1}{r}\cos\frac{\omega}{2}}{\sqrt{1 + 2r\cos\omega + r^2}} - \frac{2\sqrt{r}^3\log\frac{1}{r}\sin\frac{\omega}{2}\sin\omega}{\sqrt{1 + 2r\cos\omega + r^2}^3}$$
$$= \frac{1 - r^2}{1 + 2r\cos\omega + r^2} - \frac{\sqrt{r}(1 + r)^2\log\frac{1}{r}\cos\frac{\omega}{2}}{\sqrt{1 + 2r\cos\omega + r^2}^3}.$$

Wir müssen also zeigen, daß

$$1 - r - \sqrt{r}(1 + r)\log\frac{1}{r}\cdot\frac{\cos\frac{\omega}{2}}{\sqrt{1 + 2r\cos\omega + r^2}} > 0.$$

Das Maximum von $\frac{\cos\frac{\omega}{2}}{\sqrt{1 + 2r\cos\omega + r^2}}$ liegt bei $\cos\frac{\omega}{2} = 1$ und ist gleich $\frac{1}{1 + r}$. Also genügt es, zu zeigen, daß

$$1 - r - \sqrt{r}\log\frac{1}{r} > 0,$$

oder daß

$$P_6(r) \equiv \frac{1}{\sqrt{r}} - \sqrt{r} - \log\frac{1}{r} > 0.$$

Nun ist

$$P_6'(r) = -\frac{(1 - \sqrt{r})^2}{2r\sqrt{r}} < 0.$$

Da $P_6(1) = 0$, so ist $P_6(r) > 0$ für $r < 1$. Damit ist bewiesen, daß für $\varphi \neq \pi$ die Ungleichung $m(r) < M(r, \varphi)$ gilt, das heißt also, daß $D_r \geqq m(r)$ ist für $|w_*| = r$; dabei kann $D_r = m(r)$ nur für die Funktion ${}^0f_r(z)$ gelten. Wir müssen jetzt noch zeigen, daß $m(r)$ für $0 < r < 1$ eine monoton ab-

nehmende Funktion ist. Daraus wird dann folgen, daß für $|w_*| < r$ sicher die Ungleichung $D_r > m(r)$ erfüllt ist. Wir müssen also beweisen, daß

$$m'(r) = \frac{r^2 - 2r\log r - 1}{2r(1-r)^2} < 0,$$

oder

$$P_7(r) = r - \frac{1}{r} - 2\log r < 0.$$

Nun ist

$$P_7'(r) = 1 + \frac{1}{r^2} - \frac{2}{r} = \frac{(1-r)^2}{r^2} > 0.$$

Da $P_7(1) = 0$, so ist $P_7(r) < 0$ für $r < 1$. Damit ist Satz V bewiesen.

§ 5.

Abbildungen auf schlichte Bogen des Kreises $|w| = 1$.

Auf Grund von Satz V läßt sich insbesondere die Abschätzung von Satz C für die Funktionen $f_r(z)$ verschärfen. Wir können nämlich jetzt folgendes aussagen: Besitzt eine Funktion $f_r(z)$ auf einem Bogen der Länge α des Kreises $|z| = 1$ stetige Randwerte vom Betrage 1 und bildet die Funktion diesen Kreisbogen auf einen solchen der Länge β ab, so ist

$$\alpha < \beta \frac{2(1-r)}{(1+r)\log\frac{1}{r}}. \tag{25}$$

Daraus folgt, daß jeder Bogen α_r, der durch eine Funktion $f_r(z)$ auf einen schlichten Bogen des Kreises $|w| = 1$ abgebildet wird, kleiner als $2\pi \cdot \frac{2(1-r)}{(1+r)\log\frac{1}{r}}$ ist. Die letztere Schranke läßt sich aber noch verbessern. Es gilt nämlich der folgende

Satz VI. *Bildet eine Funktion $f_r(z)$ der Familie $\mathfrak{F}_r$ einen Bogen B der Länge α_r des Kreises $|z| = 1$ auf einen schlichten Bogen des Kreises $|w| = 1$ ab, so ist*

$$\alpha_r \leqq 4\,\mathrm{arctg}\,\frac{\pi}{\log\frac{1}{r}} \equiv \mu(r), \quad 0 < \mathrm{arctg} < \frac{\pi}{2}.$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur für die Funktion ${}^0f_r(z)$ sowie für diejenigen Funktionen, welche durch Drehungen der w- und z-Ebene daraus hervorgehen, und zwar gibt es zu jeder dieser Funktionen nur einen speziellen Bogen B_0 des Kreises $|z| = 1$, für welchen das Gleichheitszeichen gilt.

Beweis. Wir bezeichnen die Randpunkte der Riemannschen Fläche, auf welche $w = {}^0f_r(z)$ den Kreis $|z| < 1$ abbildet, durch den Bogen $\omega = \arg {}^0f_r(e^{\vartheta i})$. Dabei setzen wir fest, daß $\arg {}^0f_r(1) = 0$, und daß im übrigen ω von $\vartheta = \arg z$ im Intervall $-\pi < \vartheta < \pi$ stetig abhängt. Dann

entspricht jedem Randpunkt der Riemannschen Fläche (mit Ausnahme des Verzweigungspunktes) genau ein Wert von ω. Die Punkte des Kreises $|z| = 1$ bezeichnen wir durch $\vartheta = \arc z$; dabei lassen wir ϑ das Intervall $-\pi \leqq \vartheta \leqq \pi$ durchlaufen.

Aus den Transformationen (4), (5) und (6) ergibt sich, daß der Randpunkt $z_r = \dfrac{\log r - \pi i}{\log r + \pi i}$ in $\omega = \pi$ und $\bar{z}_r = \dfrac{\log r + \pi i}{\log r - \pi i}$ in $\omega = -\pi$ übergeht. Daher entspricht der schlichte Kreisbogen $-\pi \leqq \omega \leqq \pi$ einem Bogen B_0 der Länge $2 \arc z_r = 4 \operatorname{arctg} \dfrac{\pi}{\log \dfrac{1}{r}} \equiv \mu(r)$. In diesem Falle gilt also in Satz VI das Gleichheitszeichen.

Wir beweisen jetzt, daß jeder schlichte Kreisbogen $\omega_\varkappa \leqq \omega \leqq \omega_\varkappa + 2\pi$ mit $\omega_\varkappa \neq -\pi$ durch die Funktion $w = {}^0f_r(z)$ auf einen Bogen des Kreises $|z| = 1$ abgebildet wird mit der Länge ${}^1\alpha_r < \mu(r)$. Dazu bemerken wir, daß zwischen den Größen ϑ und ω die Beziehungen (10) bis (14), (S. 212) bestehen, wenn wir $\varphi_\varkappa - \pi = \omega$ setzen. Ersetzen wir in (14) noch z durch $e^{\vartheta i} z$, so erhalten wir

$$ {}^0f_r(z) = e^{-\omega i} \cdot g_{r,\,\pi+\omega}(e^{\vartheta i} z). $$

In dieser Gleichung können wir nach (13) ω durch $-\omega$ und ϑ durch $-\vartheta$ ersetzen und erhalten

$$ {}^0f_r(z) = e^{\omega i} \cdot g_{r,\,\pi-\omega}(e^{-\vartheta i} z). $$

Also ist $\dfrac{d\omega}{d\vartheta} = |\,{}^0f_r'(e^{\vartheta i})\,| = g'_{r,\,\pi-\omega}(1) = M(r, \pi - \omega) = M(r, \pi + \omega)$. Daher kann man $\mu(r)$ folgendermaßen ausdrücken:

$$ \mu(r) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\vartheta}{d\omega}\, d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\omega}{M(r, \pi + \omega)}. $$

Setzen wir $\omega_\varkappa = \omega_0 + 2\varkappa\pi$, $-\pi \leqq \omega_0 < \pi$ $(\varkappa = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$, so ergibt sich für ${}^1\alpha_r$

$$ {}^1\alpha_r = \int_{\omega_\varkappa}^{\omega_\varkappa + 2\pi} \frac{d\omega}{M(r, \pi + \omega)} = \int_{\omega_\varkappa}^{(2\varkappa+1)\pi} \frac{d\omega}{M(r, \pi + \omega)} + \int_{(2\varkappa+1)\pi}^{\omega_\varkappa + 2\pi} \frac{d\omega}{M(r, \pi + \omega)} $$

$$ = \mu(r) - \int_{-\pi}^{\omega_0} \left(\frac{1}{M(r, \pi + \omega)} - \frac{1}{M(r, \pi + \omega + 2(\varkappa+1)\pi)} \right) d\omega $$

$$ - \int_{\omega_0}^{\pi} \left(\frac{1}{M(r, \pi + \omega)} - \frac{1}{M(r, \omega + \varkappa + 2\varkappa\pi)} \right) d\omega. $$

Beim Beweis von Satz II hat sich nun ergeben, daß für $-\pi < \omega < \pi$ der Wert $M(r, \pi + \omega)$ vergrößert wird, wenn man ω um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π vermehrt. Also gilt im Intervall $-\pi < \omega < \pi$

$$M(r, \pi + \omega + 2(\varkappa + 1)\pi) > M(r, \pi + \omega) \quad \text{für} \quad \varkappa \neq -1,$$
$$M(r, \pi + \omega + 2\varkappa\pi) > M(r, \pi + \omega) \quad \text{für} \quad \varkappa \neq 0.$$

Die beiden letzten Integrale sind daher nicht negativ, und zwar ist für $\omega_\varkappa \neq -\pi$ mindestens eines von ihnen positiv. Denn beide Integrale werden nur dann gleichzeitig gleich 0, wenn $\omega_0 = -\pi$ und $\varkappa = 0$, d. h. $\omega_\varkappa = -\pi$. Daher ist

$$^1\alpha_r \leqq \mu(r). \tag{26}$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur für $\omega_\varkappa = -\pi$, d. h. für den Bogen B_0.

Wir betrachten nun eine beliebige Funktion $w = f_r(z)$. Wegen der Monotonie der Funktion $\mu(r)$ können wir dabei ohne Beschränkung der Allgemeinheit wieder annehmen, daß $w_* = -r$ ist. Bildet nun die Funktion $f_r(z)$ einen Bogen der Länge α_r auf einen schlichten Bogen des Kreises $|w| = 1$ ab, dann bildet die schon S. 210 betrachtete zusammengesetzte Funktion $\zeta = h_r(z)$ den Bogen (α_r) auf den Teilbogen (β_r) eines Bogens der Länge $^1\alpha_r$ ab, d. h.

$$\beta_r \leqq {}^1\alpha_r, \tag{27}$$

und nach Satz C ist

$$\alpha_r \leqq \beta_r. \tag{28}$$

In (28) steht das Gleichheitszeichen nur dann, wenn $h_r(z) \equiv z$, d. h. $f_r(z) \equiv {}^0f_r(z)$. Aus (26), (27) und (28) folgt die Behauptung.

II. Abschnitt.

Über Familien von Funktionen $w = f(z)$, welche einen Wert w_* nur an Kreuzungspunkten annehmen.

§ 1.

Obere Schranke für $|f'(0)|$.

Wir wollen nun unsere Betrachtungen auf solche Funktionen $f(z)$ ausdehnen, welche für $|z| < 1$ ausnahmslos alle Werte w mit $|w| < 1$ annehmen dürfen. Dagegen wollen wir jetzt voraussetzen, daß $f(z)$ einen gewissen Wert w_* für $|z| < 1$ nur an Kreuzungspunkten $z_{*\nu}$ annimmt. Man nennt $z_{*\nu}$ einen Kreuzungspunkt $(n-1)$-ter Ordnung, wenn

$$f'(z_{*\nu}) = f''(z_{*\nu}) = \ldots = f^{(n-1)}(z_{*\nu}) = 0 \text{ und } f^{(n)}(z_{*\nu}) \neq 0$$

ist. Dabei wird an Stelle des in Abschnitt I überall vorkommenden logarithmischen Punktes ein n-blättriger Verzweigungspunkt treten. Der Übergang $n \to \infty$ wird daher zu den Resultaten des Abschnitts I zurückführen. In Analogie zu Satz I erhalten wir dann den folgenden

Satz VII. *Ist* ${}_n\mathfrak{F}_r$ *die Familie aller Funktionen, die den Bedingungen des Schwarzschen Lemmas genügen und die für* $|z| < 1$ *einen Wert* w_* *mit* $0 < |w_*| \leqq r < 1$ *nur an Kreuzungspunkten* $z_{*\nu}$ *von der* $(n-1)$*-ten Ordnung annehmen*[11]*, so gilt für eine beliebige Funktion* $w = {}_nf_r(z)$ *aus* ${}_n\mathfrak{F}_r$ *mit* $n \geqq 2$

$$|{}_nf_r'(0)| \leqq n \frac{r}{1-r^2}\left(\sqrt[n]{\frac{1}{r}} - \sqrt[n]{r}\right) = \mathfrak{M}_*(r,n) < \mathfrak{M}_*(r,n-1) \leqq 1.$$

Die Gleichung $|{}_nf_r'(0)| = \mathfrak{M}_*(r,n)$ *gilt nur für*

$${}_n^0f_r(z) = \frac{\left(\sqrt[n]{\frac{1}{r}}\cdot z + 1\right)^n - \left(\sqrt[n]{r}\, z - 1\right)^n}{\left(z + \sqrt[n]{\frac{1}{r}}\right)^n - \left(z + \sqrt[n]{r}\right)^n}$$

und für diejenigen Funktionen, welche durch Drehungen der w- und z-Ebene aus ${}_n^0f_r(z)$ *hervorgehen. Die Funktion* ${}_n^0f_r(z)$ *nimmt den Wert* $w_* = -r$ *nur an dem Kreuzungspunkt* $z_* = -\sqrt[n]{r}$ *von der* $(n-1)$*-ten Ordnung an und ist dadurch ausgezeichnet, daß sie für positive Werte von z positiv wird. Für* $n \to \infty$ *erhält man*

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}_*(r,n) = \mathfrak{M}(r).$$

Außerdem gilt gleichmäßig in jedem Kreis $|z| \leqq \varrho < 1$

$$\lim_{n\to\infty} {}_n^0f_r(z) = {}^0f_r(z).$$ [12])

Beweis. Wir beweisen zunächst, daß die Funktion ${}_n^0f_r(z)$ den Kreis $|z| \leqq 1$ konform auf denjenigen Teil der Riemannschen Fläche von $\sqrt[n]{w+r}$ abbildet, welcher den Kreis $|w| \leqq 1$ überdeckt, wobei ${}_n^0f_r(z)$ für positive Werte von z positiv und ${}_n^0f_r(0) = 0$ ist. Wir führen die Abbildung wieder in drei Schritten durch. Zunächst bringen wir durch

$$u(z) = \frac{z + \sqrt[n]{r}}{1 + \sqrt[n]{r}\, z} \tag{29}$$

[11]) Dabei soll auch der Fall mit eingeschlossen sein, daß der Funktionswert w_* überhaupt nicht angenommen wird.

[12]) Im abgeschlossenen Einheitskreis $|z| < 1$ konvergiert die Funktionenfolge ${}_n^0f_r(z)$ nicht. Denn es ist ${}_n^0f_r(-1) = 1$ für gerades n und ${}_n^0f_r(-1) = -1$ für ungerades n. Die Grenzfunktion ${}^0f_r(z)$ ist im Punkte $z = -1$ wesentlich singulär.

den Punkt $z_* = -\sqrt[n]{r}$, welcher Kreuzungspunkt der Abbildungsfunktion werden soll, in den Nullpunkt der u-Ebene. Dabei ist $u_0 = u(0) = \sqrt[n]{r}$. Hierauf bilden wir den Einheitskreis durch

$$v(u) = u^n \tag{30}$$

auf denjenigen Teil der Riemannschen Fläche von $\sqrt[n]{v}$ ab, welcher den Kreis $|v| \leqq 1$ überdeckt, wobei $v_0 = v(u_0) = r$ ist. Schließlich führen wir durch die Transformation

$$w(v) = \frac{v - r}{1 - rv} \tag{31}$$

den Verzweigungspunkt $v = 0$ in $w = -r$ über. Dabei ist $w(v_0) = 0$. Durch Zusammensetzung der Abbildungen (29), (30) und (31) erhalten wir die Funktion $w = {}_n^0 f_r(z)$ und man sieht leicht, daß die Strecke $0 \leqq z \leqq 1$ in die Strecke $0 \leqq w \leqq 1$ übergeht. $w = {}_n^0 f_r(z)$ nimmt den Wert $w_* = -r$ nur an dem Punkt $z = -\sqrt[n]{r}$ an, und zwar ist das ein Kreuzungspunkt $(n-1)$-ter Ordnung; denn $v = u^n$ nimmt den Wert $v = 0$ nur für $u = 0$ an, und dies ist ein Kreuzungspunkt $(n-1)$-ter Ordnung von $v = u^n$. Die Funktion ${}_n^0 f_r(z)$ gehört daher zur Familie ${}_n\mathfrak{F}_r$. ${}_n^0 f_r'(0)$ ergibt sich aus

$$\left(\frac{du}{dz}\right)_{z=0} = 1 - \sqrt[n]{r^2} \qquad \left(\frac{dv}{du}\right)_{u=u_0} = n \cdot u_0^{n-1} \qquad \left(\frac{dw}{dv}\right)_{v=v_0} = \frac{1}{1 - r^2},$$

also

$${}_n^0 f_r'(0) = n \frac{r}{1 - r^2} \left(\sqrt[n]{\frac{1}{r}} - \sqrt[n]{r} \right) = \mathfrak{M}_*(r, n),$$

wie in Satz VII behauptet war.

Wir betrachten jetzt eine beliebige Funktion ${}_n f_r(z)$, wobei wir wieder ohne Beschränkung der Allgemeinheit $w_* < 0$ und ${}_n f_r'(0) > 0$ annehmen können. Zunächst nehmen wir an, daß $w_* = -r$ ist. Dann ergibt sich in Analogie zum Beweis von Satz I, daß die Funktion $\zeta = {}_n^0 f_r({}_n f_r(z)) = {}_n h_r(z)$ bei geeigneter Wahl des Zweiges ${}_n^0 f_r(w)$ im Kreis $|z| < 1$ eindeutig ist und die Bedingungen des Schwarzschen Lemmas erfüllt. Daraus folgt:

$${}_n f_r'(0) \leqq {}_n^0 f_r'(0).$$

Das Gleichheitszeichen kann nur dann stehen, wenn ${}_n h_r(z) = z$, d. h. ${}_n f_r(z) \equiv {}_n^0 f_r(z)$ ist.

Wie beim Beweis von Satz I ist jetzt noch zu zeigen, daß $\mathfrak{M}_*(r, n)$ bei festem n für $0 < r < 1$ eine monoton zunehmende Funktion ist, d. h. daß

$$\frac{\partial}{\partial r} \mathfrak{M}_*(r, n) = \frac{n}{(1 - r^2)^2} \left\{ r^{\frac{1}{n}} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) r^2 + 1 - \frac{1}{n} \right] - r^{\frac{1}{n}} \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right) r^2 + 1 + \frac{1}{n} \right] \right\} > 0$$

$$\text{für} \quad 0 < r < 1 \qquad \text{und} \quad n \geqq 2.$$

Setzen wir $r^{\frac{2}{n}} = x$, so lautet unsere Behauptung

$$_nQ(x) \equiv (n-1)\,x^{n+1} - (n+1)\,x^n + (n+1)\,x - (n-1) < 0$$

$$\text{für} \quad 0 < x < 1 \quad \text{und} \quad n \geqq 2.$$

Die Gleichung $_nQ(x) = 0$ hat nach der Vorzeichenregel von Descartes drei positive Wurzeln oder eine gerade Anzahl weniger, wobei jede Wurzel ihrer Vielfachheit entsprechend gezählt wird. $x = 1$ ist aber bereits eine dreifache Wurzel der Gleichung, da $_nQ(1) = {}_nQ'(1) = {}_nQ''(1) = 0$ ist. Also hat die Gleichung $_nQ(x) = 0$ im Intervall $0 < x < 1$ sicher keine Wurzel. Daher gilt die Ungleichung $_nQ(x) < 0$ nicht nur für $x = 0$, sondern auch im Intervall $0 < x < 1$, wie behauptet war.

Zum Beweis, daß $\mathfrak{M}_*(r, n) < \mathfrak{M}_*(r, n-1)$ ist, variieren wir n stetig und zeigen, daß

$$\frac{\partial}{\partial n}\,\mathfrak{M}_*(r, n) < 0$$

oder

$$\sqrt[n]{\frac{1}{r}} - \sqrt[n]{r} + \frac{\log r}{n}\left(\sqrt[n]{\frac{1}{r}} + \sqrt[n]{r}\right) < 0$$

$$\text{für} \quad 0 < r < 1, \quad n \geqq 2.$$

Setzen wir $\sqrt[n]{\frac{1}{r}} = y$, so lautet unsere Behauptung:

$$y - \frac{1}{y} - \left(y + \frac{1}{y}\right)\log y < 0 \quad \text{für} \quad y > 1$$

oder

$$P_8(y) \equiv \frac{y^2 - 1}{y^2 + 1} - \log y < 0.$$

Nun ist $P_8(1) = 0$; wir brauchen also nur zu zeigen, daß $P_8'(y) < 0$ ist für $y > 1$, d. h.

$$\frac{4y}{(y^2+1)^2} - \frac{1}{y} < 0$$

oder

$$4y^2 - (y^2+1)^2 \equiv -(y^2-1)^2 < 0.$$

Diese Ungleichung ist eine Trivialität. Damit ist die Abschätzungsformel für $|{}_nf_r'(0)|$ bewiesen.

Für $n \to \infty$ erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}_*(r, n) = \frac{r}{1-r^2} \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\frac{1}{r}} - \sqrt[n]{r}\right) = \frac{2r\log\frac{1}{r}}{1-r^2} = \mathfrak{M}(r).$$

Die Richtigkeit der letzten Aussage von Satz VII erkennt man ganz ohne Rechnung durch Betrachtung der zusammengesetzten Funktion $\zeta_n = {}^0_n f_r({}^0 f_r(z))$. Sie bildet den Kreis $|z| < 1$ konform auf denjenigen Teil

der Riemannschen Fläche von $\log(\zeta_n + \sqrt[n]{r})$ ab, welcher den Kreis $|\zeta_n| < 1$ überdeckt. Der Zweig von $\zeta_n = {}_n^0 f_r(w)$ läßt sich so wählen, daß der Punkt $z = 0$ dem Punkt $\zeta_n = 0$ entspricht und daß ζ_n für alle positiven Werte von z positiv wird. Wir können dann schreiben: $\zeta_n = {}^0 f_{\sqrt[n]{r}}(z)$. Diese Funktionen bilden eine normale Familie, und es existiert daher eine Teilfolge mit festem r, welche in jedem Kreis $|z| \leqq \varrho < 1$ gleichmäßig gegen eine reguläre analytische Grenzfunktion $G(z)$ konvergiert; dabei ist nach dem Konvergenzsatz von Weierstraß[13])

$$G'(0) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{d\,\zeta_n}{d\,z} \right)_{z=0} = \lim_{n \to \infty} \mathfrak{M}\left(\sqrt[n]{r}\right) = 1.$$

Da $G(z)$ im übrigen die Bedingungen des Schwarzschen Lemmas erfüllt, ist $G(z) = z$ nach Satz A. Für jede konvergente Teilfolge ζ_n gilt daher im Kreis $|z| \leqq \varrho$ gleichmäßig $\lim_{n \to \infty} \zeta_n = z$; dasselbe gilt dann notwendig auch für die Gesamtfolge ζ_n.

Wegen der Normalität existiert auch von der Funktionenfolge ${}_n^0 f_r(z)$ im Kreis $|z| \leqq \varrho$ eine gleichmäßig konvergente Teilfolge. Da aus der gleichmäßigen die stetige[14]) Konvergenz folgt, so gilt für die Teilfolge

$$\lim_{n \to \infty} {}_n^0 f_r(\zeta_n) = \lim_{n \to \infty} {}_n^0 f_r(z).$$

Andererseits ist

$${}_n^0 f_r(\zeta_n) = {}_n^0 f_r\left({}_n^0 f_r\left({}^0 f_r(z)\right)\right) = {}^0 f_r(z).$$

Daher gilt

$$\lim_{n \to \infty} {}_n^0 f_r(z) = {}^0 f_r(z)$$

für jede konvergente Teilfolge und infolgedessen auch für die Gesamtfolge. Damit ist Satz VII vollständig bewiesen.

§ 2.

Untere Schranke für D in Abhängigkeit von $|w_*|$ und $\arg w_*$.

Ebenso wie Satz I läßt sich auch Satz II als Grenzfall eines allgemeineren Satzes auffassen, nämlich des folgenden Satzes VIII.

Satz VIII. *Ist ${}_n\mathfrak{F}_{r\varphi}$ die Familie aller Funktionen, die den Bedingungen des Schwarzschen Lemmas genügen und die für $|z| < 1$ den Wert $w_* = re^{\varphi i}$ mit $0 < r < 1$*[15]), *$0 \leqq \varphi < 2\pi$ nur an Kreuzungspunkten $z_{*\nu}$ von der*

[13]) Hurwitz-Courant, Funktionentheorie, 3. Aufl., Berlin 1929, S. 303.

[14]) Hurwitz-Courant, a. a. O., S. 304.

[15]) Für $r = 0$ ist ${}_nD_{0\varphi} = n$ und das Gleichheitszeichen gilt nur für die Funktion z^n. Dies folgt leicht durch Anwendung von Satz B auf die Funktion $\sqrt[n]{{}_nf_{0\varphi}(z)}$, welche die Bedingungen des Schwarzschen Lemmas erfüllt.

$(n-1)$-ten Ordnung annehmen, so gilt für die Winkelderivierte ${}_nD_{r\varphi}$ einer beliebigen Funktion ${}_nf_{r\varphi}(z)$ aus ${}_n\mathfrak{S}_{r\varphi}$ mit $n \geqq 2$

$$ {}_nD_{r\varphi} \geqq n \frac{1-2r\cos\varphi+r^2}{(1-r^2)\left(1-\sqrt[n]{r^2}\right)} \left\{1 - 2\sqrt[n]{r}\cos\left[\frac{1}{n}\left(2\operatorname{arctg}\frac{r\sin\varphi}{1-r\cos\varphi}+\varphi-\pi\right)\right] + \sqrt[n]{r^2}\right\} $$

$$ \equiv M_*(r,\varphi,n) > 1. $$

$$ -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}\frac{r\sin\varphi}{1-r\cos\varphi} < \frac{\pi}{2}. $$

Es gibt für $q > 0$ zu jedem Wert w_* genau eine Funktion ${}_n^1f_{r\varphi}(z)$ der Familie ${}_n\mathfrak{S}_{r\varphi}$, für welche das Gleichheitszeichen gilt. Dagegen gilt für $q = 0$ das Gleichheitszeichen bei zwei Funktionen ${}_n^1f_{r0}(z)$ und ${}_n^2f_{r0}(z)$ der Familie ${}_n\mathfrak{S}_{r0}$. Die Funktionen ${}_n^1f_{r\varphi}(z)$ und ${}_n^2f_{r0}(z)$ gehen aus ${}_n^0f_r(z)$ durch geeignete Drehungen der w- und z-Ebene hervor. Für $n \to \infty$ erhält man

$$ \lim_{n\to\infty} M_*(r,\varphi,n) = M(r,\varphi). $$

Beweis. Wir können uns wieder beim Beweis auf solche Funktionen ${}_nf_{r\varphi}(z)$ beschränken, für welche ${}_nf_{r\varphi}(1) = 1$ ist. Zunächst betrachten wir eine spezielle Funktion ${}_ng_{r\varphi}(z)$ der Familie ${}_n\mathfrak{S}_{r\varphi}$, die den Kreis $|z| \leqq 1$ konform auf denjenigen Teil der Riemannschen Fläche von $\sqrt[n]{w-w_*}$ abbildet, welcher den Kreis $|w| \leqq 1$ überdeckt, wobei noch die Nebenbedingungen ${}_ng_{r\varphi}(0) = 0$ und ${}_ng_{r\varphi}(1) = 1$ zu erfüllen sind. Damit ist dann allerdings die Funktion ${}_ng_{r\varphi}(z)$ noch nicht eindeutig bestimmt. Dies wird vielmehr erst dann der Fall sein, wenn wir noch nähere Angaben darüber machen, welchen Blättern der Riemannschen Fläche von $\sqrt[n]{w-w_*}$ die Bilder von $z = 0$ und $z = 1$ angehören sollen. Um dies zum Ausdruck zu bringen, wollen wir in der Funktionenschar ${}_ng_{r\varphi}(z)$ statt des Parameters φ wieder einen Parameter $\varphi_\varkappa$ einführen, indem wir folgendes festsetzen:

(32) $\varphi_\varkappa = \varphi + 2\varkappa\pi, \qquad \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$

(33) $\varphi_\varkappa = \pi$ gilt dann und nur dann, wenn ${}_ng_{r\varphi_\varkappa}(z) \equiv {}_n^0f_r(z)$,

(34) $\varphi_\varkappa$ soll für $0 \leqq \varphi_\varkappa < 2n\pi$ in stetiger Weise von w_* abhängen.

Außer dem Parameter $\varphi_\varkappa$ führen wir wieder ein Argument ϑ ein, welches den folgenden drei Bedingungen unterworfen wird:

(35) ${}_n^0f_r(e^{\vartheta i}) = e^{(\varphi_\varkappa-\pi)i}$,

(36) $\vartheta = 0$ gilt dann und nur dann, wenn $\varphi_\varkappa = \pi$ ist,

(37) ϑ soll für $0 \leqq \varphi_\varkappa < 2n\pi$ in stetiger Weise von $\varphi_\varkappa$ abhängen.

Durch (35), (36) und (37) ist φ_z in einem gewissen Intervall

$$-\vartheta_0 \leqq \vartheta < 2\pi - \vartheta_0$$

bei festem r als monoton wachsende stetige Funktion von ϑ definiert, wobei $\lim_{\vartheta \to 2\pi - \vartheta_0} \varphi_z = 2n\pi$ und $\lim_{\vartheta \to -\vartheta_0} \varphi_z = 0$ ist. Also ist jedem Wert von φ_z im Intervall $0 \leqq \varphi_z < 2n\pi$ genau ein Argument ϑ im Intervall $-\vartheta_0 \leqq \vartheta < 2\pi - \vartheta_0$ zugeordnet. Wie beim Beweis von Satz II folgt, daß zugleich mit (35) auch die Beziehung

$$(38) \qquad {}^{0}_{n}f_r(e^{-\vartheta i}) = e^{-(\varphi_z - \pi)i}$$

erfüllt ist. Nunmehr können wir die Funktion $w = {}_n g_{r\varphi_z}(z)$ eindeutig definieren durch

$$(39) \qquad {}_n g_{r\varphi_z}(z) \equiv e^{(\varphi_z - \pi)i} \cdot {}^{0}_{n}f_r(e^{-\vartheta i} z).$$

Man bestätigt leicht, daß die Funktion ${}_n g_{r\varphi_z}(z)$ zur Familie ${}_n\mathfrak{F}_{r\varphi}$ gehört und im übrigen alle Bedingungen erfüllt, denen auch die Funktionen ${}_n g_{r\varphi}(z)$ genügen sollten. Läßt man φ_z monoton von 0 nach $2n\pi$ anwachsen, so führt die Riemannsche Fläche, auf welche $w = {}_n g_{r\varphi_z}(z)$ den Einheitskreis abbildet, n Umdrehungen im positiven Sinn aus, wobei die Bilder von $z = 0$ und $z = 1$ fest bleiben. Aus (39) und aus der Art und Weise, wie ϑ von φ_z abhängt, folgt, daß wir nach n Umdrehungen (und zwar frühestens nach n Umdrehungen) wieder zur Ausgangsfunktion zurückgekehrt sind. Die Funktionenmenge ${}_n g_{r\varphi_z}(z)$ mit festen r, φ und n und variablem z enthält daher sämtliche n-Funktionen der ursprünglich definierten Funktionenmenge ${}_n g_{r\varphi}(z)$ mit festen r, φ und n.

Wir wollen nun die Winkelderivierte ${}_n g'_{r\varphi_z}(1)$ als Funktion von r, φ_z und n berechnen. Dabei führen wir in zweckmäßiger Weise wieder statt der Hilfsgröße ϑ eine andere Hilfsgröße τ ein und konstruieren die Funktion ${}_n g_{r\varphi_z}(z)$ in drei Schritten. Zunächst bilden wir durch die lineare Transformation

$$(40) \qquad u(z) = \frac{u_0 + e^{\tau i} z}{1 + e^{\tau i} \bar{u}_0 z}$$

den Einheitskreis auf sich selbst ab. Dabei sei

$$(41) \qquad u_0 = u(0) = \sqrt[n]{r}\, e^{\frac{\varphi_z}{n} \tau i}$$

und τ möge so bestimmt werden, daß

$$(42) \qquad u_1 = u(1) = \sqrt[n]{\frac{1 - r e^{\varphi i}}{1 - r e^{-\varphi i}}},$$

wobei wir unter der n-ten Wurzel den Hauptwert verstehen, d. h. $|\arg u_1| < \frac{\pi}{n}$. Den expliziten Ausdruck für τ benötigen wir nicht. Hierauf bilden wir durch

$$v(u) = u^n \tag{43}$$

den Einheitskreis auf eine n-blättrige Riemannsche Fläche ab, wobei $v_0 = u_0^n = -re^{\varphi i}$ und $v_1 = u_1^n = \frac{1 - re^{\varphi i}}{1 - re^{-\varphi i}}$ ist. Schließlich führen wir durch die Transformation

$$w(v) = \frac{v + re^{\varphi i}}{1 + re^{-\varphi i} v} \tag{44}$$

den Verzweigungspunkt $v = 0$ in $w = re^{\varphi i}$ über. Dabei ist $w(v_0) = 0$ und $w(v_1) = 1$. Durch Zusammensetzung der Abbildungen (40), (43) und (44) erhalten wir eine Funktion, welche mit dem vorhin definierten $w = {}_n g_{r\varphi_z}(z)$ identisch ist. Die Winkelderivierte errechnet sich aus

$$\left(\frac{dw}{dv}\right)_{v=v_1} = \frac{(1 - re^{-\varphi i})^2}{1 - r^2}$$

$$\left(\frac{dv}{du}\right)_{u=u_1} = n \cdot \left(\frac{1 - re^{\varphi i}}{1 - re^{-\varphi i}}\right)^{1-\frac{1}{n}}$$

$$\left(\frac{du}{dz}\right)_{z=1} = e^{\tau i} \frac{(1 - \bar{u}_0 u_1)^2}{1 - |u_0|^2}$$

$${}_n g'_{r\varphi_z}(1) = n \cdot \frac{|1 - re^{\varphi i}|^{1-\frac{1}{n}} \, |1 - re^{-\varphi i}|^{1+\frac{1}{n}}}{(1 - r^2)\left(1 - \sqrt[n]{r^2}\right)} \cdot \left|1 - e^{\frac{\pi}{n}\varphi_z i}\right| \cdot \sqrt[n]{r \frac{1 - re^{\varphi i}}{1 - re^{-\varphi i}}}^{\,2}$$

$$= n \cdot \frac{1 - 2r\cos\varphi + r^2}{(1 - r^2)\left(1 - \sqrt[n]{r^2}\right)} \cdot \left\{1 - 2\sqrt[n]{r}\cos\left[\frac{1}{n}\left(2\operatorname{arctg}\frac{r\sin\varphi}{1 - r\cos\varphi} + \varphi_z - \pi\right)\right] + \sqrt[n]{r^2}\right\}$$

$$\equiv M_*(r, \varphi_z, n).$$

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} < \frac{\pi}{2}.$$

Für die Funktion ${}_n g_{r\varphi_z}(z)$ gilt also im Falle $\varphi_z = \varphi$, d. h. $0 \leqq \varphi_z < 2\pi$ in Satz VIII das Gleichheitszeichen. Wir können daher ${}_n g_{r\varphi_z}(z) \equiv {}_n^1 f_{r\varphi}(z)$ setzen für $0 \leqq \varphi_z < 2\pi$. Wegen $M_*(r, 2\pi, n) = M_*(r, 0, n)$ gilt das Gleichheitszeichen in Satz VIII auch für ${}_n g_{r,\,2\pi}(z)$, und wir können ${}_n g_{r,\,2\pi} = {}_n^2 f_{r0}(z)$ setzen. Liegt dagegen φ_z außerhalb des Intervalls $0 \leqq \varphi_z \leqq 2\pi$, so ist ${}_n g'_{r\varphi_z}(1) > M_*(r, \varphi, n)$. Denn setzen wir wieder $2\operatorname{arctg}\frac{r\sin\varphi}{1 - r\cos\varphi} + \varphi_z - \pi - \Omega(r, \varphi_z)$, so gilt ja für $2\nu\pi < \varphi_z < 2(\nu+1)\pi$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ die Ungleichung $(2\nu - 1)\pi < \Omega < (2\nu + 1)\pi$ [16]). Daher wird der Wert von $\cos\frac{\Omega(r, \varphi)}{n}$ verkleinert, wenn ein ganzzahliges Vielfaches von 2π zu φ

[16]) Vgl. Fußnote [10]).

hinzugezählt wird (abgesehen vom Fall $M_*(r, 0, n) = M_*(r, 2\pi, n)$). Also ist allgemein

$$ {}_n g'_{r\varphi_z}(1) \geqq M_*(r, \varphi, n) \tag{45} $$

und das Gleichheitszeichen gilt nur für die Funktionen ${}^1_n f_{r\varphi}(z)$ und ${}^2_n f_{r0}(z)$.

Die Abschätzungsformel von Satz VIII ergibt sich nun wie bei Satz II durch Vergleich einer beliebigen Funktion ${}_n f_{r\varphi}(z)$ mit einer Funktion ${}_n g_{r\varphi_z}(z)$. Wir bilden die Funktion $\zeta = {}_n\bar{g}_{r\varphi_z}({}_n f_{r\varphi}(z)) = {}_n h_{r\varphi_z}(z)$: dann läßt sich die Zahl z so wählen und ein Zweig der Umkehrfunktion $\zeta = \overline{{}_n g_{r\varphi_z}}(w)$ so bestimmen, daß ${}_n h_{r\varphi_z}(z)$ die Bedingungen des Schwarzschen Lemmas erfüllt und daß außerdem ${}_n h_{r\varphi_z}(1) = 1$ ist. Bezeichnen wir die Winkelderivierte von ${}_n h_{r\varphi_z}(z)$ mit D_h, so folgt aus Satz B

$$ D_h \geqq 1, \tag{46} $$

wo das Gleichheitszeichen nur dann gilt, wenn ${}_n f_{r\varphi}(z) = {}_n g_{r\varphi_z}(z)$. Außerdem ergibt sich wie beim Beweis von Satz II

$$ D_h = \frac{{}_n D_{r\varphi}}{{}_n g'_{r\varphi_k}(1)}. \tag{47} $$

Aus (45), (46), (47) folgt nun

$$ {}_n D_{r\varphi} \geqq M_*(r, \varphi, n), $$

wo das Gleichheitszeichen nur für die Funktionen ${}^1_n f_{r\varphi}(z)$ und ${}^2_n f_{r0}(z)$ stehen kann.

Zum vollständigen Beweis von Satz VIII brauchen wir nur noch den Grenzübergang $n \to \infty$ durchzuführen. Wir erhalten

$$ \lim_{n\to\infty} M_*(r, \varphi, n) = \frac{1 - 2r\cos\varphi + r^2}{2(1-r^2)} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1-\sqrt[n]{r}} \cdot \left\{1 - 2\sqrt[n]{r}\cos\frac{\Omega}{n} + \sqrt[n]{r^2}\right\} $$

$$ = \frac{1 - 2r\cos\varphi + r^2}{2(1-r^2)} \lim_{n\to\infty} \left\{ n\left(1 - \sqrt[n]{r}\right) + \frac{4n\sqrt[n]{r}}{1-\sqrt[n]{r}} \sin^2\frac{\Omega}{2n} \right\} $$

$$ = \frac{1 - 2r\cos\varphi + r^2}{2(1-r^2)} \left\{ \log\frac{1}{r} + \frac{\Omega^2}{\log\frac{1}{r}} \right\} $$

$$ = M(r, \varphi), \quad \text{w. z. b. w.} $$

§ 3.

Untere Schranke für D, die von $|w_*|$ unabhängig ist.

Der Fall $\varphi = 0$ unterscheidet sich in Satz VIII ebenso wie in Satz II wesentlich vom Fall $\varphi > 0$. Für feste Werte von φ gilt nämlich wieder

$$ \lim_{r\to 1} M_*(r, \varphi, n) = 1 \qquad \text{für } \varphi > 0, \tag{48} $$

während für $\varphi = 0$ die Verhältnisse ganz anders liegen. Von besonderem Interesse ist zunächst der Fall $\varphi = 0$, $n = 2$. Denn es ist $M_*(r, 0, 2) = 2$ für alle Werte von r. Daraus folgt unmittelbar

Satz IX. *Ist ${}_2\mathfrak{F}_{r0}$ die Familie aller Funktionen, die den Bedingungen des Schwarzschen Lemmas genügen und für $|z| < 1$ einen Wert $w_* = r$ mit $0 < r < 1$ nur an Kreuzungspunkten z_{*r} von der 1. Ordnung annehmen, so gilt für die Winkelderivierte ${}_2D_{r0}$ einer beliebigen Funktion ${}_2f_{r0}(z)$ aus ${}_2\mathfrak{F}_{r0}$*

$$ {}_2D_{r0} \geqq 2 \equiv \gamma_2.$$

Für jedes vorgegebene r existieren genau zwei Funktionen ${}^1_2f_{r0}(z)$ und ${}^2_2f_{r0}(z)$ der Familie ${}_2\mathfrak{F}_{r0}$, für welche das Gleichheitszeichen gilt.

Für $\varphi = 0$, $n \geqq 3$ gilt im Gegensatz zu Satz IX der folgende

Satz X. *Ist ${}_n\mathfrak{F}_{r0}$ die Familie aller Funktionen, die den Bedingungen des Schwarzschen Lemmas genügen und für $|z| < 1$ einen Wert $w_* = r$ mit $0 < r < 1$ nur an Kreuzungspunkten z_{*r} von der $(n-1)$-ten Ordnung annehmen, so gilt für die Winkelderivierte ${}_nD_{r0}$ einer beliebigen Funktion ${}_nf_{r0}(z)$ aus ${}_n\mathfrak{F}_{r0}$ mit $n \geqq 3$*

$$ {}_nD_{r0} > n^2 \sin^2 \frac{\pi}{2n} \equiv \gamma_n > \gamma_{n-1} \geqq 2.$$

Es gibt, wenn η eine beliebig kleine, positive Zahl ist, für jedes vorgegebene n gewisse r und derartige Funktionen der Familie ${}_n\mathfrak{F}_{r0}$, daß ${}_nD_{r0} < \gamma_n + \eta$. Für $n \to \infty$ erhält man

$$ \lim_{n \to \infty} \gamma_n = \frac{\pi^2}{4}.$$

Beweis. Nach Satz VIII ist

$$ {}_nD_{r0} \geqq M_*(r, 0, n) = n \cdot \frac{1-r}{(1+r)\left(1-\sqrt[n]{r^2}\right)} \cdot \left\{1 - 2\sqrt[n]{r}\cos\frac{\pi}{n} + \sqrt[n]{r^2}\right\}$$

und

$$ \lim_{r \to 1} M_*(r, 0, n) = \lim_{r \to 1} 4n \cdot \frac{(1-r)\sin^2\frac{\pi}{2n}}{(1+r)\left(1-\sqrt[n]{r^2}\right)} = n \cdot \sin^2\frac{\pi}{2n} \cdot \lim_{r \to 1} \frac{1-r}{1-\sqrt[n]{r}} = \gamma_n.$$

Also ist ${}^1_nf'_{r0}(1) = {}^2_nf'_{r0}(1) < \gamma_n + \eta$, wenn $w_* = r$ hinreichend nahe bei 1 liegt, und man erkennt leicht, daß für $n \to \infty$ der Wert γ_n monoton wächst und gegen $\frac{\pi^2}{4}$ konvergiert.

Es ist jetzt nur noch zu zeigen, daß

$$ n \cdot \frac{1-r}{(1+r)\left(1-\sqrt[n]{r^2}\right)} \cdot \left\{1 - 2\sqrt[n]{r}\cos\frac{\pi}{n} + \sqrt[n]{r^2}\right\} > \gamma_n \quad \text{für} \quad 0 < r < 1, n \geqq 3$$

oder

$$ n(1-r)\left\{(1-\sqrt[n]{r})^2 + 4\sqrt[n]{r}\sin^2\frac{\pi}{2n}\right\} - (1+r)\left(1-\sqrt[n]{r^2}\right)\gamma_n > 0.$$

Setzen wir $\sqrt[n]{r} = x$, so ist zu zeigen, daß

$$
\begin{aligned}
{}_nQ_1(x) \equiv (n^2 - n\gamma_n)\, x^{n+2} - 2(n^2 - 2\gamma_n)\, x^{n+1} + (n^2 + n\gamma_n)\, x^n \\
- (n^2 + n\gamma_n)\, x^2 + 2(n^2 - 2\gamma_n)\, x - (n^2 - n\gamma_n) < 0 \\
\text{für } 0 < x < 1. \quad n \geqq 3.
\end{aligned}
$$

Für $x = 0$ ist die Ungleichung sicher richtig, da $n^2 - n\gamma_n > 0$ ist für $n \geqq 3$. Wir brauchen daher nur noch zu zeigen, daß die Gleichung ${}_nQ_1(x) = 0$ im Intervall $0 < x < 1$ keine Wurzel hat. Nach der Vorzeichenregel von Descartes hat die Gleichung fünf positive Wurzeln oder eine gerade Anzahl weniger, wobei jede Wurzel ihrer Vielfachheit entsprechend gezählt wird. Nun ist $x = 1$ bereits eine dreifache Wurzel; denn

$$
\begin{aligned}
{}_nQ_1(x) &\equiv (x-1)^3 \cdot \sum_{\nu=1}^{n} \{n^2 - [(2\nu - 1)n - 2\nu(\nu - 1)]\gamma_n\}\, x^{n-\nu} \\
&\equiv (x-1)^3\, {}_nQ_2(x)
\end{aligned}
$$

und

$$
{}_nQ_2(1) = n^3\left(1 - \frac{\gamma_n}{3} - \frac{2}{3}\sin^2\frac{\pi}{2n}\right) > n^3\left(1 - \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{6}\right) > 0.
$$

Da die Werte ${}_nQ_2(1)$ und ${}_nQ_2(0) = n^2 - n\gamma_n > 0$ gleiches Vorzeichen haben, so kann die Anzahl der Wurzeln der Gleichung ${}_nQ_2(x) = 0$ im Intervall $0 < x < 1$ nur Null oder eine gerade Zahl sein. Der letztere Fall aber ist ausgeschlossen, da sonst die Gleichungen ${}_nQ_2(x) = 0$ und ${}_nQ_1(x) = 0$, welche reziprok sind, auch für $x > 1$ eine gerade Anzahl von Wurzeln hätten; die Gleichung ${}_nQ_1(x) = 0$ hätte dann mehr als fünf positive Wurzeln. Also ist für $0 \leqq x < 1$ dauernd ${}_nQ_1(x) < 0$, w. z. b. w.

§ 4.

Untere Schranke für D, die von arc w_* unabhängig ist.

Wir wollen nun unseren Betrachtungen über die Winkelderivierte die allgemeinere Funktionenfamilie ${}_n\mathfrak{F}_r$ zugrunde legen. Für sie gilt der folgende

Satz XI. *Bezeichnet man die Winkelderivierte einer beliebigen Funktion $w = {}_nf_r(z)$ der Familie ${}_n\mathfrak{F}_r$ mit ${}_nD_r$, so ist für $n \geqq 2$*

$$
{}_nD_r \geqq n \cdot \frac{(1+r)(1-\sqrt[n]{r})}{(1-r)(1+\sqrt[n]{r})} \equiv m_*(r,n) > m_*(r,n-1) \geqq 1.
$$

Die Gleichung ${}_nD_r = m_*(r,n)$ gilt nur für die Funktion ${}_n^0f_r(z)$. Für $n \to \infty$ erhält man

$$
\lim_{n \to \infty} m_*(r,n) = m(r).
$$

Beweis. Daß für die Funktion ${}_n^0 f_r(z) = {}_n^1 f_{r,\pi}(z)$ das Gleichheitszeichen gilt, folgt unmittelbar aus $m_*(r, n) = M_*(r, \pi, n)$. Es ist jetzt zu zeigen, daß für $\varphi \neq \pi$ die Ungleichung $M_*(r, \varphi, n) > M_*(r, \pi, n)$ gilt, d. h.

$$\left\{(1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{\varphi}{2}\right\} \cdot \left\{(1-\sqrt[n]{r})^2 + 4\sqrt[n]{r}\sin^2\frac{\Omega}{2n}\right\} > (1+r)^2(1-\sqrt[n]{r})^2$$

$$\text{für} \quad 0 < r < 1, \quad 0 \leqq \varphi < \pi, \quad n \geqq 2$$

oder

$$(49)\quad 4r\sqrt[n]{r}\sin^2\frac{\Omega}{2n}\sin^2\frac{\varphi}{2} + \sqrt[n]{r}(1-r)^2\sin^2\frac{\Omega}{2n} + r(1-\sqrt[n]{r})^2\sin^2\frac{\varphi}{2} - r(1-\sqrt[n]{r})^2 > 0.$$

Es wird sich als zweckmäßig herausstellen, in (49) den $\sin^2\frac{\varphi}{2}$ durch $\sin^2\frac{\Omega}{2}$ bzw. $\cos^2\frac{\Omega}{2}$ auszudrücken. Dies gelingt am einfachsten durch folgende Überlegung: Man kann offenbar die Betrachtungen, welche zur Herleitung von $M_*(r, \varphi, n)$ führten, auch im Falle $n = 1$ anstellen. Dabei reduziert sich das betrachtete Teilstück der Riemannschen Fläche von $\sqrt[n]{w - w_*}$ auf den schlichten Einheitskreis und $M_*(r, \varphi, 1)$ ist daher gleich der Winkelderivierten von $w = z$. Daher ist

$$M_*(r, \varphi, 1) = \frac{1 - 2r\cos\varphi + r^2}{(1-r^2)^2}\{1 - 2r\cos\Omega + r^2\} = 1.$$

Daraus folgt, daß der Ausdruck auf der linken Seite von (49) für $n = 1$ und beliebige Werte von r und φ gleich Null werden muß, d. h.

$$(49.1)\quad 4r\sin^2\frac{\Omega}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2} + (1-r)^2\sin^2\frac{\Omega}{2} + (1-r)^2\sin^2\frac{\varphi}{2} - (1-r)^2 \equiv 0.$$

Unter Berücksichtigung von (49.1) läßt sich (49) nach Multiplikation mit $(1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{\Omega}{2}$ folgendermaßen umformen:

$$4r\sqrt[n]{r}(1-r)^2\cos^2\frac{\Omega}{2}\sin^2\frac{\Omega}{2n} + \sqrt[n]{r}(1-r)^2\sin^2\frac{\Omega}{2n}\left[(1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{\Omega}{2}\right]$$

$$- r(1+r)^2(1-\sqrt[n]{r})^2\sin^2\frac{\Omega}{2} > 0$$

oder

$$\sqrt[n]{r}(1-r)^2\sin^2\frac{\Omega}{2n} - r(1-\sqrt[n]{r})^2\sin^2\frac{\Omega}{2} > 0$$

oder

$$\sqrt[2n]{r}(1-r)\sin\frac{|\Omega|}{2n} - \sqrt{r}(1-\sqrt[n]{r})\sin\frac{|\Omega|}{2} > 0.$$

Nun ist $n\sin\frac{|\Omega|}{2n} - \sin\frac{|\Omega|}{2} > 0$ wegen $\Omega \leqq \pi$. Wir brauchen also nur zu zeigen, daß

$$\sqrt[2n]{r}(1-r) - n\sqrt{r}(1-\sqrt[n]{r}) > 0$$

oder, wenn wir $\sqrt[2n]{r} = x$ setzen und die Ungleichung durch $-x$ dividieren,

$$ {}_nQ_3(x) = x^{2n} - n x^{n+1} - n x^{n-1} - 1 < 0 \quad \text{für} \quad 0 < x < 1, \; n \geqq 2. $$

Die Gültigkeit dieser Ungleichung bestätigt man leicht durch eine schon wiederholt angewendete Schlußweise: wegen ${}_nQ_3(1) = {}_nQ_3'(1) = {}_nQ_3''(1) = 0$ ist $x = 1$ eine dreifache Wurzel der Gleichung ${}_nQ_3(x) = 0$; nach der Vorzeichenregel von Descartes kann daher keine von 1 verschiedene positive Wurzel der Gleichung existieren, so daß ${}_nQ_3(x) < 0$ nicht nur für $x = 0$, sondern im ganzen Intervall $0 \leqq x < 1$ richtig ist. Damit ist bewiesen, daß für $\varphi = \pi$ die Ungleichung $m_*(r, n) < M_*(r, \varphi, n)$ gilt, das heißt also, daß ${}_nD_r \geqq m_*(r, n)$ ist für $|w_*| = r$; dabei kann ${}_nD_r = m_*(r, n)$ nur für die Funktion ${}_n^0f_r(z)$ gelten.

Wir müssen jetzt noch zeigen, daß für $|w_*| < r$ immer die Ungleichung ${}_nD_r > m_*(r, n)$ erfüllt ist; dies ist sicher der Fall, wenn

$$ \frac{\partial m_*}{\partial r} < 0 \quad \text{für} \quad 0 < r < 1, \quad n \geqq 2 $$

oder

$$ (n r - \sqrt[n]{r})(1 - r \sqrt[n]{r}) - (n+1) r \sqrt[n]{r} (\sqrt[n]{r} - r) < 0. $$

Setzen wir $\sqrt[n]{r} = x$ und dividieren die Ungleichung durch x, so lautet unsere Behauptung

$$ {}_nQ_3(x) = x^{2n} - n x^{n+1} - n x^{n-1} - 1 < 0 $$

$$ \text{für} \quad 0 < x < 1, \quad n \geqq 2. $$

Diese Ungleichung ist oben schon bewiesen worden. $m_*(r, n)$ ist also bei festem n für $0 < r < 1$ eine monoton abnehmende Funktion, d. h. ${}_nD_r > m_*(r, n)$ für $|w_*| < r$.

Es ist noch zu beweisen, daß $m_*(r, n) > m_*(r, n-1)$. Wir variieren n stetig und zeigen, daß

$$ \frac{\partial m_*}{\partial n} > 0 \qquad \text{für} \qquad 0 < r < 1 $$

oder, wenn wir $\frac{1}{n} = y$ setzen,

$$ \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{y(1 + r^y)} < 0, $$

d. h.

$$ -2 y r^y \log r + r^{2y} - 1 < 0 $$

oder, wenn wir $r^y = x$ setzen,

$$ P_9(x) \equiv \log x - \frac{x^2 - 1}{2x} > 0 \qquad \text{für} \qquad 0 < x < 1. $$

Wegen $P_9(1) = 0$ ist zu zeigen, daß

$$P_9'(x) \equiv \frac{1}{x} - \frac{x^2+1}{2x^2} < 0 \quad \text{für} \quad 0 < x < 1$$

oder

$$-(1-x)^2 < 0.$$

Die letztere Ungleichung ist trivial. Damit ist Satz XI vollständig bewiesen.

§ 5.

Abbildungen auf schlichte Bogen des Kreises $|w| = 1$.

Auf Grund von Satz XI läßt sich die Abschätzung von Satz C für die Funktionen ${}_nf_r(z)$ verschärfen. Man erhält eine zu (25), S. 220 analoge Ungleichung. Für solche Bogen ${}_n\alpha_r$, welche durch eine Funktion ${}_nf_r(z)$ auf einen schlichten Bogen des Kreises $|w| = 1$ abgebildet werden, gilt der folgende

Satz XII. *Bildet die Funktion ${}_nf_r(z)$ der Familie ${}_n\mathfrak{F}_r$ einen Bogen B der Länge ${}_n\alpha_r$ des Kreises $|z| = 1$ auf einen schlichten Bogen des Kreises $|w| = 1$ ab, so ist*

$${}_n\alpha_r \leqq 2 \operatorname{arctg} \frac{(1-\sqrt[n]{r^2})\sin\frac{\pi}{n}}{(1+\sqrt[n]{r^2})\cos\frac{\pi}{n} - 2\sqrt[n]{r}} \equiv \mu_*(r, n), \qquad 0 < \operatorname{arctg} < \pi.$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur für die Funktion ${}_n^0f_r(z)$ sowie für diejenigen Funktionen, welche durch Drehungen der w- und z-Ebene daraus hervorgehen, und zwar gibt es zu jeder dieser Funktionen nur einen speziellen Bogen B_0 des Kreises $|z| = 1$, für welchen das Gleichheitszeichen gilt. Für $n \to \infty$ erhält man

$$\lim_{n\to\infty} \mu_*(r, n) = \mu(r).$$

Beweis. Wir bezeichnen die Randpunkte der Riemannschen Fläche, auf welche $w = {}_n^0f_r(z)$ den Kreis $|z| \leqq 1$ abbildet, durch den Bogen $\omega = \operatorname{arc} {}_n^0f_r(e^{\vartheta i})$, $-\pi \leqq \omega < (2n-1)\pi$. Dabei setzen wir fest, daß $\operatorname{arc} {}_n^0f_r(1) = 0$ und daß ω für $-\pi \leqq \omega < (2n-1)\pi$ von $\vartheta = \operatorname{arc} z$ stetig abhängt. Dann entspricht jedem Randpunkt der Riemannschen Fläche genau ein Wert von ω.

Aus den Transformationen (29), (30) und (31) ergibt sich, daß der Randpunkt ${}_nz_r = \dfrac{e^{\frac{\pi i}{n}} - \sqrt[n]{r}}{1 - \sqrt[n]{r}\, e^{\frac{\pi i}{n}}}$ in $\omega = \pi$ und $\overline{{}_nz_r}$ in $\omega = -\pi$ übergeht. Daher entspricht der schlichte Kreisbogen $-\pi \leqq \omega \leqq \pi$ einem Bogen B_0 der Länge $2 \operatorname{arc} {}_nz_r = 2 \operatorname{arctg} \dfrac{(1-\sqrt[n]{r^2})\sin\frac{\pi}{n}}{(1+\sqrt[n]{r^2})\cos\frac{n}{\pi} - 2\sqrt[n]{r}} \equiv \mu_*(r, n)$. In diesem Falle

gilt also in Satz XII das Gleichheitszeichen. Im übrigen verläuft der Beweis der Abschätzungsformel von Satz XII ganz analog zum Beweis von Satz VI; dabei wird die Tatsache benutzt, daß für $0 < \varphi < 2\pi$ der Wert $M_*(r, \varphi, n)$ vergrößert wird, wenn man φ um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π vermehrt[17]). Wir brauchen hierauf nicht näher einzugehen. Für $n \to \infty$ errechnet man leicht

$$\lim_{n \to \infty} \mu_*(r, n) = 2 \operatorname{arctg} \frac{2\pi \log \frac{1}{r}}{(\log r)^2 - \pi^2} = 4 \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\log \frac{1}{r}} = \mu(r)$$

w. z. b. w.

Zum Schluß möge noch kurz darauf hingewiesen werden, daß sich in den Sätzen des II. Abschnittes die Voraussetzung, daß die Ordnungen $(n_\nu - 1)$ der Kreuzungspunkte $z_{*\nu}$ alle gleich $(n - 1)$ sind, durch schwächere Voraussetzungen ersetzen läßt. Die Sätze gelten beispielsweise auch dann noch, wenn $n_\nu = k_\nu n$, wo die k_ν natürliche Zahlen sind. Auf weitere Verallgemeinerungen soll hier nicht eingegangen werden.

---

[17]) Beim Beweis wird auch wieder die Tatsache benutzt, daß $\mu_*(r, n)$ eine monotone Funktion von r ist, was sich leicht nachprüfen läßt.

Lebenslauf

Am 18. April 1910 bin ich in Neustadt an der Weinstraße geboren als Sohn des damaligen Gymnasiallehrers Friedrich Unkelbach und seiner Ehefrau Hedwig, geb. Schmitt. Ich besuchte die Volksschule und das Gymnasium meiner Heimatstadt und absolvierte im Jahre 1929 das Gymnasium in Speyer, wohin mein Vater inzwischen versetzt worden war.

1929 bis 1934 studierte ich an der Universität München Mathematik und Physik. Nur das Sommersemester 1932 verbrachte ich außerhalb Münchens, und zwar an der Universität Hamburg. Im Jahre 1934 bestand ich den ersten Abschnitt des Staatsexamens für das höhere Lehramt in den Fächern Mathematik und Physik. 1934/35 nahm ich am pädagogisch-didaktischen Seminar an der Luitpold-Oberrealschule in München teil, wo ich im Jahre 1935 den zweiten Abschnitt des Staatsexamens bestand. Ich wurde unter die Anwärter für das staatliche höhere Lehramt aufgenommen, ließ mich jedoch von der Übernahme von Unterrichtsaushilfen entbinden, um wissenschaftlich arbeiten zu können. Seit dem Jahre 1936 bin ich als Hilfskraft am Mathematischen Seminar der Universität München beschäftigt.

Bei der Anfertigung der Dissertation wurde ich von meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. Perron, weitgehend gefördert, wofür ich auch an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank aussprechen möchte. Ebenso danke ich Herrn Professor Dr. Carathéodory für eine Reihe wertvoller Anregungen.

Helmut Unkelbach.

Druck von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig
Printed in Germany